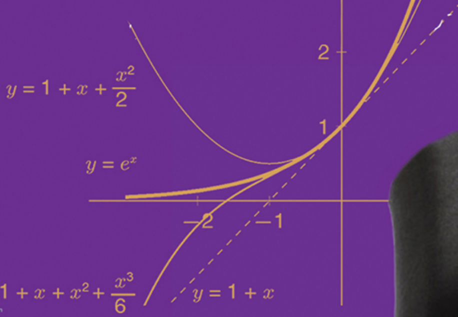
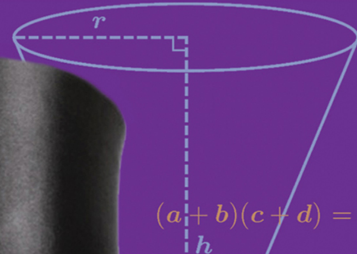
NEW YORK TIMES BESTSELLER

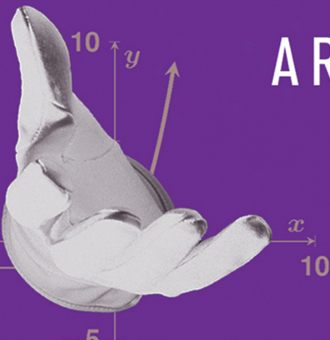




MATEMATİĞİN SİHİRLİ DÜNYASI

x'i ararken ni*y*esini anlamak

ARTHUR BENJAMIN





Çeviri Editörü: Ayhan Dil



nika

MATEMATİĞİN SİHİRLİ DÜNYASI

x'i ararken niyesini anlamak



ARTHUR BENJAMIN

MATEMATİĞİN SİHİRLİ DÜNYASI

***x*'i ararken ni*y*esini anlamak**

Arthur Benjamin

Editör: Ayhan Dil
Çevirenler: Boğaç Karçıka (0, 1, 2, 4, 6. Bölümler), Hakan Doğa (3. Bölüm), Ayhan Dil (5, 9, 10, Matah Matematik Bölümleri), Uğur Doğan (7, 8, 11. Bölümler), Uğur Efem (12. Bölüm)

Nika Yayınevi -79
Aralık 2018
ISBN: 978-605-9386-31-9
Sertifika No: 26357

Yayın Yönetmeni: Bülent Özçelik
Kapak Tasarım: Leyla Çelik
Sayfa Düzeni: Serap Akpınar

Baskı ve Cilt:
Sertifika No:

Nika Yayınevi
Yüksel Cad. 30/8 Kızılay Ankara
T: 0312 433 71 15 F: 0 312 433 71 15
www.nikayayinevi.com e-posta: info@nikayayinevi.com

MATEMATİĞİN SİHİRLİ DÜNYASI

x'i ararken niyesini anlamak

ARTHUR BENJAMIN



Nika Yayınevi

Matematiğin Sihirli Dünyası'na Övgüler

"Sihirbazların sırlarını hep gizli tutmaları gerektiğini söylerler. Neyse ki Arthur Benjamin bu küçük kitapta bu kuralı görmezden geldi. Benjamin, matematikçilerin bin yıldır ilgisini çeken sayıların ve diğer matematik illüzyonlarının sırlarını okuyucularıyla bu kitapta paylaştı."

- Edward B. Burger, Southwestern Üniversitesi Rektörü, *The 5 Elements of Effective Thinking* kitabının yazarı

"Keşke öğrencilik yıllarımda da olsaydı dediğim bu kitap öğrencilerim için büyüleyici olacak. Matematiği öğrendikçe kitaba sıklıkla tekrar bakacaklar. Her bakışlarında matematiğe daha derin bir saygı duyacak ve matematiğin yeni alanlarını keşfetmek için araştıracaklar."

- Richard Rusczyk, Art of Problem Solving kurucusu ve USA Mathematical Talent Search yöneticisi

"Matematiğin Sihirli Dünyası kitabında Arthur Benjamin imkânsız görünen bir sihirbazlık yapıyor. Yüksek matematiği oldukça doğal ve eğlenceli bir hale getirerek matematik derslerinde neden kafanızın karıştığını ve sıkıldığınızı düşünmenizi sağlıyor. Matematiği popüler hale getirmeyi amaçlayan birçok kitap var. Bu kitap bu türde yazılan kitaplar arasında en iyilerden biri. Neredeyse her sayfada ya yeni şeyler öğrendim ya da benzer konulara alışılmamış yönlerden baktım."

—Jason Rosenhouse, James Madison University Matematik Profesörü ve *The Monty Hall Problem* kitabının yazarı

"Matematiğin Sihirli Dünyası kitabında matematik sihirbazı Arthur Benjamin, genel okuyucuyu, temel matematik fikirlerinin geniş bir bölümünün aydınlatıcı ve eğlenceli bir şekilde anlatıldığı bir geziye çıkarıyor. Kavramlar ve kavramlar arasındaki bağlantıların pratik ve güler yüzlü bir şekilde anlatılması ise kitabın en ilgi çekici özelliği."

—Ronald Graham, American Mathematical Society Onursal Başkanı ve *Magical Mathematics* kitabının eş yazarı

" Bu kitap, aritmetikten ve cebirden kalkülüs ve sonsuzluğa giden bir kasırga gibi, özellikle 9 sayısı bölümü. Arthur Benjamin'in eğlenceli ve ilgi çekici yazı tekniği, Matematiğin Sihirli Dünyası kitabını matematik kitaplarına ilgisi olan kitlenin çantasına koyabileceği kitaplardan biri haline getirmiş."

—Laura Taalman, James Madison Üniversitesi Matematik ve İstatistik Profesörü

"Matematik şaşırtıcı bir güzellikte örüntülerle doludur. Arthur Benjamin'in nükteli kişiliği ile bu örüntüler Matematiğin Sihirli Dünyası kitabında vücut buldu. Sadece harika fikirleri öğrenmekle kalmayacak, eğlenceli matematiksel sihir numaraları öğrenip bu numaraları arkadaşlarınıza ve ailenize yapmak isteyeceksiniz. Size öğretilenden daha eğlenceli bir şekilde matematik öğrenmeye hazır olun."

—George W. Hart, Stony Brook Üniversitesi Matematiksel Heykeltraş ve Profesör, The Museum of Mathematics'in kurucusu

"Matematiğin Sihirli Dünyası heyecan verici örneklerle donanmış bir bahçede gezinmek gibi. Sihre, bulmacalara, ya da matematiğe ilgi duyan biri bu kitabı okurken çok büyük bir zevk duyacak."

—Maria M. Klawe, Harvey Mudd College Başkanı

"Arthur Benjamin Isaac Asimov'un duruluğuyla Martin Gardner'in tadını harmanlamış, kendine özgü eğlence anlayışını da eklemiş ve ortaya bir klasik matematik kitabı çıkmış. Keşke ben çocukken bu kitabı yazmış olsaydı."

—Paul A. Zeitz, University of San Francisco Matematik Profesörü ve *The Art and Craft of Problem Solving* kitabının yazarı

"Bu kitapta her seviyeden okuyucu için eğlenceli bir şeyler var. Birçok sihirbaz sırlarını açıklamaz fakat Matematiğin Sihirli Dünyası'nda Arthur Benjamin güzel matematiksel gerçeklerin ardındaki gizemi ortaya çıkarmanın matematiği nasıl daha harika bir hale getirdiğini bize gösteriyor.

—Francis Su, Mathematical Association of America Başkanı

"Matematiğin Sihirli Dünyası bizi matematiksel sırların ortaya çıktığı, sayıların dans ettiği matematikte engin ve unutulmaz bir seyahate çıkarıyor. Sadece kitabı açın ve okumaya başlayın: Benjamin'in yazdıklarının büyüsünün altında kalacaksınız. Neyseki bu sırları başkalarıyla paylaşmamanızı gerektiren herhangi bir sihirbaz yasası yok. Çünkü şüphesiz bu sırları ailenizle ve arkadaşlarınızla paylaşmak isteyeceksiniz."

—Tim Chartier, Davidson College, Matematik Profesörü ve *Math Bytes* kitabının yazarı

Eşim Deena ve kızlarım Laurel ve Ariel'e

İÇİNDEKİLER

Çeviriye Önsöz

Bu kitabın çeviri öyküsünden kısaca bahsetmek isterim. Kitabın yazarı Arthur Benjamin namıdiğer matematik sihirbazı (mathemagician), 2016 yılının Temmuz ayında Fransa'nın Caen şehrinde düzenlenen Seventeenth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications isimli toplantıda halka açık bir konuşma yaptı. Arthur Benjamin konuşmasına (gösterisine) seyirciyi de dâhil edip bazen bir şeyler hesaplamalarını istedi, bazen sorular sordu. İşin ilginç taraflarından birisi salonda bulunan 8 - 10 yaşındaki çocuklardan konferans için orada bulunan akademisyenlere kadar hemen herkes gösteriyi büyük bir zevkle takip etti. Konuşmasını dinlerken yediden yetmişe herkesin ilgisini çekecek konuları ve anlatım tarzını yakalamasını biraz şaşkınlık ve biraz da hayranlıkla karşılamıştım. Konuşmasının ardından kısa bir sohbet fırsatımız oldu, o sırada matematikte sihirli gördüğü, etkilendiği ve geniş halk kitlelerine anlatabileceğini düşündüğü şeyleri toparladığı, tabiri caizse ustalık eseri olarak gördüğü "The Magic of Mathematics" adlı kitabından bahsetti. New York Times'ın 2015 ve 2016 yıllarında, eğitim alanında en çok satan ilk 10 kitap listesine girdiğini, büyük ilgi gördüğünü ve kısa zamanda birçok dile çevrildiğini söyledi. Bu kitabı Türkçe'ye çevirme fikri o sırada ortaya çıktı. Ancak kitap çevirme işi, hele de Benjamin gibi kelimelerle

dans eden bir adamın kitabını çevirme işi ciddi bir karardı. Neyse ki Nesin Matematik Köyü'nde yıllar içinde edindiğim yetenekli ve samimi arkadaşların varlığı bu işi olanaklı kıldı.

Belki tam bu noktada çok şey borçlu olduğumuz Matematik Köyü'nden biraz bahsetmek yerinde olur. Nesin Matematik Köyü, İzmir'in Selçuk ilçesine bağlı Şirince köyünün yanı başında, 2007 yılında Ali Nesin ve Sevan Nişanyan'ın önderliğinde kurulan, dünyada eşi benzeri olmayan bir yer. Matematik Köyü fikri, dünyayı güzelleştirmek için yola çıkan bir grup insanın, matematiği derinlemesine kavramak, bildiklerini paylaşmak, bilmediklerini öğrenmek amacıyla bağımsız bir mekân ihtiyacından doğmuştu. Sonrasında bu fikre omuz veren onlarca, yüzlerce, binlerce insan oldu. Bir süre sonra Türkiye'den ve dünyanın çeşitli yerlerinden değerli akademisyenler dersler vermeye, toplantılar düzenlemeye başladılar. Böylelikle matematiğe ilgi-sevgi duyan, yeteneği olan ve anlamak isteyen gençlerin önüne muhteşem kapılar açıldı. Bu kitabın çeviri ekibindeki matematikçilerin hepsi Matematik Köyü'nde yıllar önce, öğrenci iken tanıştılar ve yıllar boyunca matematik köyünde defalarca birlikte dersler dinlediler, bulaşık yıkadılar, tuvalet temizlediler, odun kırdılar, yemek dağıttılar, aynı koğuşlarda uyudular. Yani bu kitap bir yönüyle Matematik Köyü'nün bir çıktısıdır. Öğrendiklerimiz, kazandıklarımız ve bizi bir araya getirdiği için Nesin Matematik Köyü'ne olan minnettarlığımızı ifade etmek isteriz.

Ülkemizde popüler matematik kitapları hem sayı hem de içerik olarak yeterli düzeyde değil, bu anlamda her özenli çalışma bir boşluğu dolduracaktır. Matematiğin Sihirli Dünyası, hem ele aldığı konular hem de bunları ele alış biçimiyle matematiğe ilgi duyan her yaştan okuyucunun severek okuyacağı bir kitap. Özellikle sağda solda çokça bahsedilen matematiksel kavramları okuyucuyu sıkmadan ama özünden de koparmadan, kıvamında bir derinlikle sunuyor. Toplama çarpma yaparken bir anda kendinizi matematiğin özüne dair bir keşfe çıkmış halde bulacaksınız!

Çeviri ekibi olarak hiçbirimiz profesyonel çevirmen değiliz ama hepimiz matematikçiyiz, kendi esas işlerimizin yanında epeyce bir zaman ve emek vererek zevkle okuyacağınızı düşündüğümüz bu kitabı hazırladık. Kitabın hazırlık sürecinde çok şey öğrendik. Bunların en önemlilerinden birisi her zaman birbirine destek olan, çıkarsızca emeğini ve sevgisini paylaşan büyük bir aile olduğumuzu bir kez daha görmek oldu. Çeviri

taslağını her aşamada yeniden okuyarak çok önemli önerilerde bulunan, eksiklikleri, yanlışları gideren arkadaşlarımızdan Ali Kemal Uncu, Ayşe Yılmaz Ceylan, Burcu Gürbüz, Çağan Özdemir, Ege Şirin, Emel Dimitroglou Rizell, Fatih Çelik, Fatmanur Yıldırım, Gümrah Uysal, Gürkan Engin, Hatice Mutlu, Hülya Duyan, İnan Ünal, Merve Görgülü Yılmaz, Merve Kaya, Merve Seçkin, Neslihan Ocak, Nihal Gümüşbaş, Nurettin Irmak, Ömer Ara, Ömer Küçüksakallı, Özcan Kasal, Seçil Gülbudak Dil, Seçkin Gülbudak, Serkan Doğan, Sude Böler, Yağmur Gazeloğlu, Yusuf Taylan Taştan'a, ayrı ayrı binlerce kez teşekkür ederiz.

Son olarak bu işe en başından beri büyük bir hevesle sahip çıkan, kar amacı gütmeden literatüre çok kıymetli kitaplar kazandıran Nika Yayınevine, özelde Baran Çiftçi, İlhan Ulusoy ve Bülent Özçelik'e ve kitabın tasarımcısı Serap Akpınar'a çok teşekkür ederiz.

Çeviri ekibi adına
Çeviri Editörü: Ayhan Dil

SIFIRINCI BÖLÜM

Giriş

Hayatım boyunca sihirli şeylere karşı bir tutkum vardı. Kendim sihir yaparken ya da diğer sihirbazları izlerken heyecan verici ve etkileyici numaralar için kullanılan yöntemlerden çok etkileniyordum. Bu numaraların sırlarını öğrenmeye bayılıyordum. Basit birkaç prensiple kendi sihir numaralarımı yaratabiliyordum.

Matematikte de aynı deneyimi yaşadım. Çok erken yaşlarda sayıların kendilerine özgü büyüleyici bir yanları olduğunu gördüm. Mesela alın size eğlenebileceğiniz bir oyun: Aklınızdan 20 ile 100 arasında (20 dahil ama 100 değil) bir sayı tutun. Tuttunuz mu? Şimdi tuttuğunuz sayıyı oluşturan rakamları birbirleriyle toplayın. Şimdi bulduğunuz sayıyı ilk tuttuğunuz sayıdan çıkarın. Son olarak, çıkan sonucu oluşturan rakamları birbirleriyle toplayın. 9 sayısını buldunuz değil mi? (Eğer bulamadıysanız bir yerlerde hata yapmış olabilirsiniz. Daha önceki hesaplamalarınıza tekrar bir göz atın.) Çok havalı değil mi? Matematik bunun gibi bir sürü sihirle doludur. Fakat çoğumuz bu gibi sihirlerle okulda hiçbir zaman karşılaşmayız. Bu kitapta sayıların, şekillerin ve saf mantığın bize nasıl muhteşem sürprizler yaptığını göreceksiniz. Ayrıca sadece birazcık cebir ve geometri bilgisiyle sihrin ardındaki gerçeği sıklıkla keşfedeceksiniz ve belki de kendi güzel matematiğinizi bulacaksınız.

Bu kitap; sayılar, cebir, geometri, trigonometri ve kalkülüs gibi önemli matematik konularını içeriyor. Fakat ayrıca çok iyi anlatılmayan Pascal üçgeni, sonsuzluk, 9'un büyülü özellikleri, *π*, *e*, *i* ve Fibonacci Sayıları ve altın oran gibi konular da kapsam dâhilinde. Birkaç düzine sayfayla büyük matematik konularını anlatmamız mümkün değil. Fakat buna rağmen umarım temel kavramları anlar, bu kavramların neden çalıştığına dair bir fikir kazanır ve her konunun zarafetini ve ilişkisini anlarsınız. Bu konulardan bazılarını görmüş olsanız bile bu konulara yeni bir bakış açısıyla bakıp eğlenirsiniz. Matematik öğrendikçe sihir giderek daha karmaşık ve heyecan verici olacak. Örneğin en sevdiğim denklemlerden biri:

$$e^{i\pi}+1=0$$

denklemidir. Bazıları bu denkleme "Tanrısal eşitlik" derler çünkü tek bir matematik denkleminde matematikteki en önemli sayılar vardır. 0 ve 1 sayıları aritmetiğin temellerini oluşturur; π = 3.14159… geometrideki en önemli sayıdır; *e* = 2.71828… kalkülüsteki en önemli sayıdır, ve *sanal sayı olan i* sayısı -1 sayısının karekökküdür. π sayısı hakkında 8. Bölüm'de, *e* ve *i* sayıları hakkında 10. Bölüm'de daha fazla şey söyleyeceğiz. 11. Bölüm'de ise bu sihirli denklemi anlamamızı sağlayan matematiği göreceğiz.

Bu kitap için hedef kitlem günün birinde matematik dersi almak zorunda olanlar, hali hazırda matematik dersi alanlar ya da matematik dersi almayı bitirenlerden oluşuyor. Başka bir deyişle matematik korkusu olandan matematiğe âşık olan kişilere kadar herkesin bu kitaptan zevk almasını istiyorum. Bu hedefime ulaşmak için bazı kurallar belirledim:

KOYU MATEMATİK

Kural 1: "Koyu matematik" sohbeti kutularını okumayı atlayabilirsiniz (Bu kutu hariç!)

Her bir bölümde konu dışına biraz çıkıp, uçlarda dolaşıp, ilginç bir şeylerden bahsetmek istediğim böyle kutular var. Ekstra örnek ya da daha ileri düzey okuyucular için ilgi çeken bir şeylerden bahsedebilirim. Bu kitabı ilk kez okuyorsanız bu bölümleri atlayabilirsiniz (Hatta ikinci ve üçüncü kez okuduğunuzda da atlayabilirsiniz). Bu kitabı okumayı bitirdikten sonra tekrar okumanızı umuyorum. Matematik tekrar ziyaret etmeye değer bir konudur.

Kural 2: Paragrafları, alt başlıkları ve hatta bölümleri atlamaktan çekinmeyin. Gri kutuları atlamanın dışında takıldığınız zaman ileri atlamaktan çekinmeyin. Bazen bir konuyu anlamak için yeni bir perspektife ihtiyaç duyarsınız. Daha sonra geri geldiğinizde konunun aslında ne kadar kolay olduğunu görünce şaşıracaksınız. Kitabın ortasında okumayı kesip sonraki sayfalarda olan diğer eğlenceli konuları kaçırmanız yazık olur.

Kural 3: Son bölümü atlamayın. Son bölüm matematikteki sonsuzluk kavramından bahsediyor. Bu bölüm size muhtemelen okulda öğretilmeyecek birçok kafa patlatıcı fikir içeriyor ve bu bölümdeki birçok sonuç bir önceki bölümlerdeki sonuçlara dayanmıyor. Diğer yandan daha önceki tüm bölümlerdeki fikirlere atıfta bulunuyor. Bu sayede kitabın daha önceki bölümlerini tekrar okumaya sizi teşvik ediyor.

Kural π: Beklenmeyeni bekleyin. Matematik oldukça ciddi bir konu olmasına karşın, öğretilirken o kadar ciddi ve katı olunmasına gerek yok. Harvey Mudd College'da çalışan bir matematik profesörü olarak dersi daha eğlenceli hale getirmek için ara sıra kelime oyunları ve espriler yapmaktan, şiir okumaktan, şarkı söylemekten ya da sihirbazlık numaraları yapmaktan kendimi alıkoyamıyorum. Bütün bunlar bu kitabın ilerleyen sayfalarında olacak. Ve şu an okumakta olduğunuz şey bir kitap olduğundan beni şarkı söylerken dinleyemeyeceksiniz. Çok şanslısınız!

Bu kurallara uyun ve matematiğin sihirli dünyasını keşfedin!

BİRİNCİ BÖLÜM

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = 5050$

Sayıların Sihri

Sayı Örüntüleri

Matematik sayılarla başlar. Okulda saymayı; sayıları kelimelerle, rakamlarla ya da objelerle ifade etmeyi öğrendikten sonra yıllarımızı bu sayıları toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve aritmetikteki diğer yöntemleri kullanarak nasıl manipüle edeceğimizi öğrenerek harcadık. Bütün bunlara rağmen eğer sadece yüzeye bakarsak, sayıların kendi içinde sihirli bir yapısı olduğunu ve bizi eğlendirebilecek şeyler olduğunu göremeyiz.

Matematikçi Karl Friedrich Gauss'un küçük bir çocukken karşılaştığı problemle başlayalım. Gauss'un öğretmeni Gauss'tan ve sınıf arkadaşlarından 1'den 100'e kadar sayıları toplamalarını istemiş. Öğretmen bu sıkıcı ödevi vererek, öğrencileri meşgul tutup diğer işleriyle ilgilenmek istemiş. Gauss hemen 5050 cevabını bularak öğretmenini ve sınıf arkadaşlarını şaşkına çevirmiş. Bunu nasıl yapmış? Gauss 1 den 100'e kadar olan sayıları iki satırda hayal etmiş. İlk satırda 1 den 50'ye kadar olan sayıları küçükten

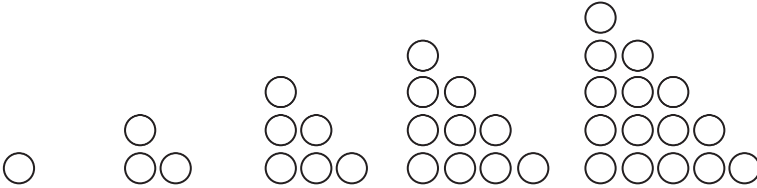
büyüğe doğru yazmış. İkinci satırda ise 51'den 100'e kadar olan sayıları *büyükten küçüğe* doğru sıralamış. Daha sonra bu satırların oluşturduğu sütunlara bakmış. Oluşan 50 sütundan her birinin toplamı 101 çıkmış. Bütün sütunların toplamını ise 50 x 101 işlemini yaparak 5050 bulmuş.

1	2	3	4	...	47	48	49	50
+ 100	+ 99	+ 98	+ 97	...	+ 54	+ 53	+ 52	+ 51
101	101	101	101	...	101	101	101	101

1 den 100'e kadar olan sayıları iki satırda yazmak; her çiftin toplamı 101 çıkar.

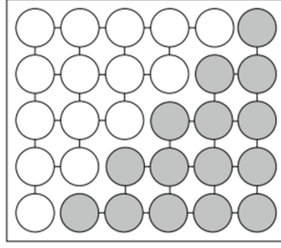
Gauss daha sonra on dokuzuncu yüzyılın en büyük matematikçisi oldu. Sadece kafasından hızlı işlem yaptığından değil sayıları dans ettirebilme yeteneğinden bunu başardı. Bu bölümde birçok ilginç sayı örüntülerini keşfedip sayıların nasıl dans ettiğini görmeye başlayacağız. Bu örüntülerin bazıları kafanızdan hızlı işlem yapmanızı sağlayabilir. Bazıları ise kendi başlarına güzeldir.

İlk 100 sayıyı toplamak için Gauss'un fikrini kullandık, peki ya ilk 17 ya da 1000 ya da 1 milyon sayıyı toplamak isteseydik ne yapardık? Aslında Gauss'un fikrini ilk n sayıyı toplamak için kullanacağız. Burada n istediğimiz herhangi bir sayı olacak! Bazı insanlar soyut sayıları görselleştirdiklerinde daha rahat hissederler. 1, 3, 6, 10 ve 15 sayılarına *üçgensel sayı* diyelim. Çünkü aşağıda gördüğünüz gibi elimizde bu miktarda nokta olunca o noktalarla üçgen şekli oluşturabiliyoruz. (1 noktanın üçgen oluşturmadığını düşünebilirsiniz. Fakat yine de 1 sayısı üçgensel sayı olarak kabul edilir.) Üçgensel sayıların formal tanımı şöyledir: n-inci üçgensel sayı $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ toplamının sonucudur.



İlk 5 üçgensel sayı 1, 3, 6, 10 ve 15'tir.

İki üçgeni aşağıda gösterildiği gibi kenar kenara birleştirdiğimizde neler olduğuna bir bakın.



Bu dikdörtgende kaç tane nokta vardır?

İki üçgenin birleşmesiyle oluşan bu dikdörtgenin 5 satırı 6 sütunu olduğundan bu dikdörtgende 30 nokta olduğunu hemen buluruz. Her bir üçgende dikdörtgende olan nokta sayısının yarısı kadar nokta olması gerekir yani 15 nokta vardır. İyi de biz bunu zaten biliyorduk. Fakat aynı argüman bize n satırı olan iki üçgen aldığımızda n satırı ve $n + 1$ sütunu olan bir dikdörtgen oluşturabileceğimizi söyler. Buradan da dikdörtgenin $n \times (n + 1)$ (biz bunu genellikle $n(n + 1)$ şeklinde yazarız.) noktası olduğunu buluruz. Sonuç olarak söz verdiğimiz **ilk *n* sayının toplamını veren formülü buluruz:**

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Az önce yaptığımız şeyi daha iyi anlamaya çalışalım: İlk 100 sayının toplamında bir örüntü gördük ve aynı formda olan başka bir probleme bu örüntüyü genişlettik. Mesela ilk 1 milyon sayıyı toplamak istersek artık bunu sadece iki aşamada yapabiliriz: 1000000 ile 1000001 sayısını çarpıp, bulduğumuz sonucu 2'ye böleriz!

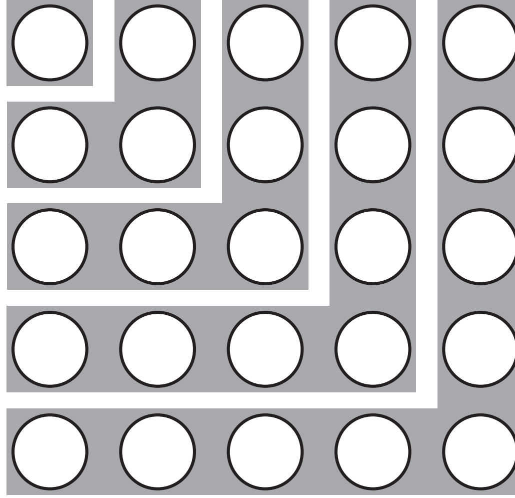
Bir matematik formülünü anladığınız zaman diğerleri kendiliğinden gelir. Mesela son eşitliğin iki tarafını 2 ile çarparsak **ilk *n* çift sayının toplamını buluruz:** $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

Peki ya ilk n tek sayının toplamı? Bakalım sayılar bize ne söyleyecek.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

İlk n tek sayının toplamı kaçtır?

Eşitliklerin sağ tarafında olan sayılar *tam kare sayılar*: 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3 vb. Örüntüyü takip edince ilk *n* tek sayının toplamının *n x n* yani n^2 olduğunu söylemek çok zor değil. Peki, bunun sadece bir tesadüf olmadığından nasıl emin olabiliriz? 6. Bölüm'de bu formülü ortaya çıkarmak için çeşitli yollar göreceğiz. Fakat böyle basit bir örüntünün basit bir açıklaması olmalı. En sevdiğim açıklama yine *noktaları say* stratejisini kullanıyor ve bize 25 gibi sayılara neden tam kare dediğimizi hatırlatıyor. İlk 5 tek sayının toplamı neden 5^2 olsun ki? Aşağıdaki 5 x 5'lik kareye bakın.



Bu karede kaç nokta vardır?

Bu karede 5 x 5 = 25 nokta vardır. Fakat noktaları biraz daha farklı bir şekilde sayalım. Üst sol köşede duran nokta ile başlayalım. Bu noktanın etrafı 3 nokta ile çevrilmiş. Daha sonra 5 nokta ile çevrilmiş, daha sonra 7 ve son olarak 9 nokta. Sonuç olarak

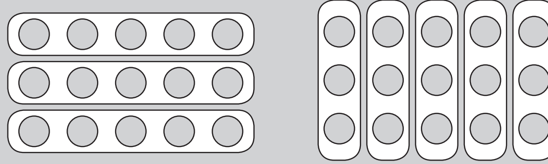
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Eğer *n* x *n* lik bir kareden işe başlasaydık bu kareyi büyüklükleri 1, 3, 5, 7, … , (2n - 1) olan *n* tane L şeklinde parçaya ayırabilirdik. Böyle sayınca da **ilk *n* tek sayının toplamını** veren formüle ulaşırdık:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

KOYU MATEMATİK

Bu kitapta ilerideki sayfalarda noktaları sayma yaklaşımlarının (ve bir soruyu iki farklı yoldan cevaplamanın) ileri matematikte bizi nasıl ilginç sonuçlara ulaştıracağını göreceğiz. Bu yaklaşım bizi temel matematikte de ilginç sonuçlara götürür. Örneğin, neden 3 x 5 = 5 x 3 olur? Eminim "çarpma işleminde sıralamanın önemi yoktur" önermesini çocukluğunuzda size söylendiğinden beri hiç sorgulamamışsınızdır. (Matematikçiler bu önermeyi "sayıların çarpımı değişmelidir" olarak söylerler.) Peki, ama neden her birinde 5 bilye olan 3 çantadaki bilye sayısı her birinde 3 bilye olan 5 çantadaki bilye sayısına eşittir? Eğer 3 e 5'lik bir dikdörtgende noktaları sayarsanız açıklaması çok basit olur. Satır satır sayarak her biri 5 nokta içeren 3 satır görürüz. Yani 3 x 5 olur. Diğer yandan her biri 3 nokta içeren 5 sütunumuz var. Buradan da 5 x 3 çıkar.



Neden 3 x 5 = 5 x 3 olur?

Şimdi tek sayıların toplamındaki örüntüden yola çıkarak daha güzel bir örüntü oluşturalım. Eğer sayıların dans etmesini amaçlıyorsak şimdi yapacağımız şeye *karelerin dansı* adını verebilirsiniz. Aşağıdaki denklemler piramidini ele alalım:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

$$\vdots$$

Hangi örüntüleri görüyorsunuz? Her bir satırdaki sayıları sayarsak 3, 5, 7, 9… sayılarına ulaşırız. Sonra daha beklenmedik bir örüntü karşımıza çıkar. Her satırdaki ilk sayılara bakalım. İlk 5 satıra bakacak olursak 1, 4, 9, 16, 25 sayıları var. Sanki tam kare sayılar gibi görünüyor. Neden böyle olsun ki? Şimdi 5. satıra bakalım. 5. satırdan önceki satırlarda kaç sayı vardı? Daha önceki 4 satırı sayacak olursak 3 + 5 + 7 + 9 toplamına ulaşırız. 5. satırın ilk sayısına ulaşmak için bu toplama 1 eklememiz yeterli. Yani gerçekten de ilk 5 tek sayını toplamına ulaşırız ve bunun 5^2 olduğunu biliyoruz.

Şimdi 5. satırdaki eşitliği hiçbir sayı eklemeden bulmaya çalışalım. Gauss olsa ne yapardı? Geçici bir süreliğine denklemin başındaki 25 sayısını görmezden gelecek olursak sol taraftaki her bir sayının onlara eş gelen sağ taraftaki her bir sayıdan 5 eksik olduğunu görürüz.

25	26	27	28	29	30
	- 31	- 32	- 33	- 34	- 35
	-5	-5	-5	-5	-5

5. satırdaki eşitliğin sol tarafında yazan sayılarla sağ tarafında yazan sayıları karşılaştırmak

Bu sebepten, sağ taraftaki 5 sayının toplamı, kendileriyle eşleşen sol taraftaki sayıları toplamından 25 fazladır. Fakat bu açık, sol taraftaki 25 sayısıyla giderilir. Böylece denklemin her iki yanı eşitlenir. Aynı mantığı kullanarak ve biraz da cebir kullanarak, bu örüntünün sonsuza kadar sürdüğü gösterilebilir.

KOYU MATEMATİK

Biraz cebir görmek isteyenler bu kutu sizin için. n. satır $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1$ sayıdan oluşur. Yani denklemin sol tarafı n^2 ile başlamalıdır. Daha sonra n tane ardışık sayı olmalıdır. Yani $n^2 + 1$'den $n^2 + n$'ye kadar sayılar olmalıdır. Sağ tarafta ise $n^2 + n + 1$'den $n^2 + 2n$'ye n tane ardışık sayı olmalıdır. Eğer geçici olarak sol taraftaki n^2 terimini yok sayarsak, sağ taraftaki n sayı sol taraftaki onlarla eşleşen sayılardan n fazladır. Kısaca her iki taraftaki denklemlerin farkı $n \times n$ yani n^2 olur. Fakat az önce görmezden geldiğimiz n^2 bu denklemin her iki tarafını da dengeler.

Yeni bir örüntü vakti geldi. Daha önce tek sayıların kareler oluşturabildiğini görmüştük. Şimdi aşağıda göreceğiniz gibi bütün tek sayıları kocaman bir üçgenin içinde koyduğumuzda ne olduğunu göreceğiz. $3 + 5 = 8$, $7 + 9 + 11 = 27$, $13 + 15 + 17 + 19 = 64$ olduğunu biliyoruz. Peki, 1, 8, 27, 64 sayılarının ortak noktası nedir? Hepsi birer tam küp sayıdır. Örneğin, beşinci satırdaki beş sayıyı topladığımızda

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & = & 1 & = & 1^3 \\
3 + 5 & = & 8 & = & 2^3 \\
7 + 9 + 11 & = & 27 & = & 3^3 \\
13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 & = & 4^3 \\
21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125 & = & 5^3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Tek sayılardan oluşan üçgen

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

eşitliğine ulaşırız.

Örüntü bize sanki n-inci satırdaki sayıların toplamının n^3 olması gerektiğini söylüyor. Bu gerçekten de böyle mi yoksa sadece *garip* bir tesadüf mü? Örüntüyü anlamamıza yardımcı olması için 1, 3 ve 5. satırların ortalarındaki sayılara bakalım. Ne görüyorsunuz? 1, 9 ve 25. Yani tam kare sayılar. 2. ve 4. satırların ortalarında sayı yoktur. Fakat ortada olması gereken sayı yerine onun civarındaki sayılar 3 ve 5 (Bu iki sayının ortalaması 4'tür) ve 15 ve 17 (Bu iki sayının ortalaması 16'dır.) Şimdi bu örüntüden nasıl yararlanacağımıza bir bakalım.

Tekrar 5. satıra bakın. Bu satırdaki sayıların toplamının 5^3 olduğunu sayıları toplamadan, sadece bu sayıların 25 sayısının simetrik olarak civarında gezdiğini fark ederek anlayabilirsiniz. Bu beş sayının ortalaması 5^2 olduğundan, toplamları $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5 \times 5^2 = 5^3$ çıkar. Benzer bir şekilde 4. satırdaki 4 sayının ortalaması 4^2'dir. Yani sayıların toplamı 4^3 olmalıdır. Birazcık daha cebir bilgisiyle (Burada bu bilgiyi kullanmayacağız.) *n.* satırdaki *n* sayının ortalamasının n^2 çıktığını ve böylece sayıların toplamının n^3 olduğunu gösterebilirsiniz.

Küplerden ve karelerden bahsettiğimize göre size bir örüntü daha göstermeden rahat edemeyeceğim. 1^3 sayısından başlayarak bütün küpleri topladığınızda hangi sonuçları elde edersiniz?

$$1^3 = 1 = \mathbf{1^2}$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = \mathbf{3^2}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = \mathbf{6^2}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = \mathbf{10^2}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = \mathbf{15^2}$$
$$\vdots$$

Küplerin toplamı her zaman tam kareleri verir.

Küpleri topladığımızda 1, 9, 36, 100, 225 … gibi sonuçlar elde ederiz. Bu sayıların hepsi tam kare sayılardır. Fakat öyle herhangi bir tam kare sayı değildir bunlar. 1, 3, 6, 10, 15 gibi üçgensel sayıların kareleridir! Daha önceden bu üçgensel sayıların doğal sayıların toplamından ortaya çıktığını görmüştük. Örneğin,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

Genelleyecek olursak, *ilk n sayının küplerinin toplamı ilk n sayının toplamlarının karesine eşittir*, diyebiliriz. Bu sonucu kanıtlamak için henüz hazır değiliz. 6. Bölüm'de bu sonucu iki farklı şekilde kanıtlayacağız.

Mental Hesaplamalar

Bazıları bütün bu sayı örüntülerine bakıp "Tamam güzelmiş ama ne işe yarıyor ki bunlar?" diye sorabilir. Birçok matematikçi tıpkı bir sanatçının cevaplayacağı gibi güzel bir örüntünün güzelliği dışında herhangi bir açıklamaya gerek olmayacağını söyler. Ve biz onu ne kadar derin anlayabilirsek örüntü o kadar güzelleşir. Fakat bazı zamanlar bu örüntülerin gerçekten de uygulamaya yönelik kısımları vardır.

Şimdi size gençken keşfetme zevkini tattığım (bunu keşfeden ilk kişi olmamama rağmen) bir örüntü göstereceğim. Toplamları 20 çıkan sayı çiftlerine bakarken (10 ve 10, 9 ve 11 gibi) bu çiftlerin çarpımlarının ne kadar büyük olabileceğini merak ediyordum. Her iki sayı da 10 olduğunda çarpım en yüksek çıkıyor gibi görünüyordu. Bu sonucu bir örüntüyle de doğruladım.

	100 Sayısına olan Uzaklık
10 x 10 = 100	
9 x 11 = 99	1
8 x 12 = 96	4
7 x 13 = 91	9
6 x 14 = 84	16
5 x 15 = 75	25
⋮	⋮

Toplamları 20 yapan sayı çiftleri

Örüntü yanlış olamazdı. Sayılar birbirinden uzaklaştıkça sayıların çarpımları küçülüyordu. Peki, 100 sayısından ne kadar uzaklaşabilirlerdi? 1, 4, 9, 16, 25, … , (bu sayılar 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 olarak da yazılabiliyordu). Bu örüntü her zaman çalışır mı? Başka bir örnek yapmaya karar verdim. Bu sefer toplamları 26 olan sayı çiftlerine baktım.

	169 sayısına olan uzaklık
13 x 13 = 169	
12 x 14 = 168	1
11 x 15 = 165	4
10 x 16 = 160	9
9 x 17 = 153	16
8 x 18 = 144	25
⋮	⋮

Toplamları 26 yapan sayı çiftleri

Bir kez daha sayıları eşit alınca çarpımları maksimum çıktı ve diğer çarpımlar yine 1, 4, 9, … uzaklıktaydı. Birkaç örnekten sonra örüntünün doğru olduğuna ikna oldum. (Bu durumun ardındaki cebir bilgisini size daha sonra açıklayacağım.) Daha sonra bu örüntünün sayıların karesini daha hızlı hesaplamamızda kullanılabileceği bir yol gördüm.

Diyelim ki 13'ün karesini almak istiyorsunuz. 13 x 13 işlemini yapmak yerine daha kolay bir işlem olan 10 × 16 = 160 işlemini yapacağız. Neredeyse doğru cevabı bulduk. Fakat sayıların birini 3 artırıp birini 3 çıkardığımız için doğru cevaptan 3^2 uzaklıktayız.

$$13^2 = (10 \times 16) + 3^2 = 160 + 9 = 169$$

Başka bir örnek deneyelim. Bu yöntemle 98 x 98 çarpımını bulalım. Bunun için önce sayılardan birini 2 artırıp 100 bulacağız, sonra diğerini 2 azaltıp 96 bulacağız. Daha sonra ise 2^2 ekleyeceğiz.

$$98^2 = (100 \times 96) + 2^2 = 9600 + 4 = 9604$$

Sonu 5 ile biten sayıların karelerini almak daha da kolay. Çünkü sayılardan birinden 5 çıkarıp diğerine 5 eklemek yeterli. Böylece her iki sayının son rakamı 0 olur. Örneğin,

$$35^2 = (30 \times 40) + 5^2 = 1200 + 25 = 1225$$
$$55^2 = (50 \times 60) + 5^2 = 3000 + 25 = 3025$$
$$85^2 = (80 \times 90) + 5^2 = 7200 + 25 = 7225$$

Şimdi 59^2'yi deneyelim. 1 artırıp 1 azaltarak $59^2 = (60 \times 58) + 1^2$ eşitliğine ulaşırız. Peki, ama 60 ile 58'i kafadan nasıl çarpacağız? Size tavsiye olarak üç kelimelik bir cümle söyleyebilirim: Soldan sağa gidin. Öncelikle 60'taki 0 rakamını görmezden gelip 6 ve 58 sayılarının çarpımını bulalım. 6 ve 58 sayılarının çarpımını bulmak için 6 x 50 = 300 ve 6 x 8 = 48 işlemlerini yapıp, sonuçları toplamamız yeterli: 348. O zaman 60 x 58 = 3480 çıkar. Buradan da

$$59^2 = (60 \times 58) + 1^2 = 3480 + 1 = 3481$$

sonucuna ulaşırız.

KOYU MATEMATİK

Bu yöntemin neden doğru olduğunu açıklayan cebirsel bilgi şu şekilde: (Bölüm 2'de *karelerin farkı* kısmını okuduktan sonra buraya tekrar dönmek isteyebilirsiniz.)

$$A^2 = (A + d)(A - d) + d^2$$

Burada A karesini almak istediğimiz sayı ve d ise A sayısının en yakın kolay çarpım yapabileceğimiz sayıya olan uzaklığı. (d herhangi bir başka sayı da olabilirdi.) Diyelim ki 59 sayısının karesini bulmak istiyorsunuz. Burada $A = 59$, $d = 1$ olur. Formülde sayıları yerine koyarak $(59 + 1)(59 - 1) + 1^2 = 3481$ eşitliğine ulaşırsınız

İki basamaklı sayıların karesini çok rahat bir şekilde almaya başlayınca üç basamaklı sayıların da karesini aynı yöntemle alabilirsiniz. Mesela $12^2 = 144$ eşitliğini biliyorsanız

$$112^2 = (100 \times 124) + 12^2 = 12400 + 144 = 12544$$

eşitliğine ulaşabilirsiniz.

Benzer bir yöntem 100'e yakın iki sayının çarpımında da kullanılabilir. Yöntemi ilk kez gördüğünüzde size sihir gibi gelecek. 104 x 109 çarpımına bakalım. Aşağıdaki şekilde gördüğünüz gibi her bir sayının yanına o sayının 100'e olan uzaklığını yazalım. Şimdi ilk sayı ile ikinci sayının mesafesini toplayalım. Bizim örneğimiz için 104 + 9 = 113 çıkar. Daha sonra mesafeleri çarpalım; 4 × 9 = 36. Daha sonra bulduğumuz bu iki sayıyı yan yana yazalım. İşte aradığımız şey/sayı sihirli bir şekilde karşımıza çıktı.

$$\begin{array}{rl} 104 & (4) \\ \underline{\times\ 109} & (9) \\ 113 & 36 \end{array}$$

100'e yakın sayıların sihirli çarpımı, 104 x 109 = 11336

Bu durumun ardındaki cebir bilgisini ve daha fazla örneği 2. Bölüm'de size göstereceğim. Fakat, hazır bu konudayken önce size zihinsel matematik hakkında birkaç şeyden söz edeyim. Kalem ve kâğıtla aritmetik yapmak için bir dolu boş zaman harcayıp kafamızdan matematik yapabilmek için az ama değerli zaman harcadık. Fakat yine de karşımıza çıkan birçok pratik örnekte, hesaplama yaparken elimize kalem kağıt almak yerine zihnimizden yapmaya çalışırız. Büyük hesaplamalar için hesap makinesi

kullanarak kesin sonuca ulaşırsınız fakat genelde beslenme etiketi okurken ya da bir konuşma dinlerken ya da satış raporlarını dinlerken hesap makinesi kullanmazsınız. Bu gibi durumlarda önemli nicelikler için zihinden iyi yaklaşımlar yapmak istersiniz. Okulda öğretilen yöntemler kalem ve kâğıtla aritmetik yapmak için iyidir. Fakat bu yöntemle zihninizden toplama yapamazsınız. Günün birinde zihinden hızlı hesap yapma stratejileriyle ilgili belki bir kitap yazabilirim ama öncelikle şu önemli fikirleri size söyleyeyim: Benim de yeterince vurgulayamadığım en önemli ipucu, problemlerin *soldan sağa* doğru yapılması. Zihinsel matematik sabit sadeleştirmeler içeren bir süreçtir. Zor bir problem ile başlarsınız daha sonra onu kolay bir hale getirene kadar sadeleştirirsiniz ve sonunda sonucu bulursunuz.

Mental Toplama

$$314 + 159$$

Toplamını ele alalım. (Kalem ve kâğıdı elinize alıp işlem yapmaya üşeneceğinizi düşündüğümden işlemleri bilerek yatay yazıyorum.) 314 sayısına ilk önce 100 eklersek daha kolay bir problemle karşılaşırız:

$$414 + 59$$

414 sayısına 50 ekleyince problemimiz daha da basitleşir. Hatta öyle basitleşir ki problemi hemen çözebiliriz:

$$464 + 9 = 473$$

İşte bu zihinsel toplamanın özüdür. Bir diğer kullanışlı strateji de zor bir toplama problemini basit bir çıkarma problemine dönüştürmektir. Bu yöntem genellikle perakende ürünlerin fiyatlarını hesaplarken karşımıza çıkar. Örneğin,

$$23.58 \text{ TL} + 8.95 \text{ TL}$$

8.95 TL, 9 TL'den 5 Kuruş eksik olduğu için İlk önce 23.58 ile 9'u toplarız daha sonra 5 kuruş çıkarırız. Yani problemi

$$32.58 \text{ TL} - 0.05 \text{ TL} = 32.53 \text{ TL}$$

haline getirip çözeriz.

Mental Çıkarma

Zihinsel çıkarma yapmanın en önemli fikri *fazladan* çıkarma stratejisidir. Örneğin bir sayıdan 9 çıkarmak istediğimizde önce o sayıdan 10 çıkarırız sonra 1 ekleriz. Mesela

83 - 9 = 73 + 1 = 74

Bir sayıdan 39 çıkarmak istediğimizde ise önce o sayıdan 40 çıkartırız sonra 1 ekleriz.

83 - 39 = 43 + 1 = 44

İki veya daha fazla basamaklı sayıları çıkardığımızda buradaki kilit fikir *tamamlayıcılardır.* (Beni daha sonra bunun için tamamlayacaksınız.) Bir sayının tamamlayıcısı, o sayıdan bir sonra gelen sayıyla yuvarlanmış sayıyla arasındaki mesafedir. Tek basamaklı sayılar için tamamlayıcılar 10 sayısına olan mesafedir. (Örneğin 9 sayısının tamamlayıcısı 1 dir.) İki basamaklı sayılar için tamamlayıcılar 100 sayısına olan mesafeyi gösterir. Aşağıdaki toplamları 100 eden sayı çiftlerine bakın. Bir şey fark ettiniz mi?

87	75	56	92	80
+ 13	+25	+44	+08	+20
100	100	100	100	100

Birbirini tamamlayan iki basamaklı sayıların toplamı 100 eder.

87 sayısının tamamlayıcısı 13, 75 sayısının tamamlayıcısı 25 vb. Bunun tersi de geçerlidir. Yani 13 sayısının tamamlayıcısı 87 ve 25 sayısının tamamlayıcısı da 75 olur. Her bir işlemi soldan sağa okurken soldaki rakamların toplamının 9 (son işlem hariç) sağdaki rakamların toplamının 10 olduğunu fark edeceksiniz. Buradaki tek istisna sayının (son işlemde olduğu gibi) 0 ile bitmesidir. Mesela 80 sayısının tamamlayıcısı 20'dir. Şimdi bu stratejiyi 1234 – 567 işlemini yaparken kullanalım. Bu işlem kâğıt kalem kullanarak yapıldığında hiç zevkli olmaz. Fakat *tamamlayıcılar* sayesinde zor çıkarma soruları kolay toplama sorularına döner! 567 çıkarmak için önce 600 çıkaracağız. Özellikle soldan sağa düşündüğünüzde bunu yapması çok kolaydır: 1234 - 600 = 634. Fakat biraz fazla çıkardınız. Ne kadar fazla çıkardınız? 600 sayısı 567 sayısından ne kadar fazlaysa o kadar çıkardınız. Bu mesafe 67 ile 100 sayısını arasındaki mesafe ile aynı: 33. O zaman

1234 - 567 = 634 + 33 = 667

Çıkarma işlemini toplama işlemine çevirince daha kolay oluyor çünkü “onluk almak ” gibi bir şey söz konusu olmuyor. Tamamlayıcılarla çıkarma işlemi yapınca sıklıkla bu durumla karşılaşacağız: Buna benzer bir durum 3 basamaklı sayıların tamamlayıcılarında olur.

789	555	870
+ 211	+ 445	+ 130
1000	1000	1000

Üç basamaklı sayıların tamamlayıcılarıyla toplamı 1000 eder.

Birçok problemde (sayıların sonu 0 ile bitmediğinde) birbiriyle eşleşen sayıların toplamı 9 eder. Sadece son basamakta yazan sayıların toplamı 10 eder. Örneğin, 789 sayısıyla olan örnekte, 7 + 2 = 9, 8 + 1 = 9 ve 9 + 1 = 10. Bu yöntem para bozdurmak için kullanışlı olabilir. Mesela yerel bir büfede en sevdiğim sandviç 6.76 TL. Eğer 10 TL verirsem para üstü olarak ne kadar almalıyım? 676 sayısının tamamlayıcısını bularak cevaba ulaşabiliriz: 324. Yani para üstü olarak 3.24 TL almam gerekir.

KOYU MATEMATİK

Bu sandviçi her aldığımda ücretin ve para üstünün tam kare olduğunu düşünmekten kendimi alıkoyamıyorum. ($26^2 = 676$ ve $18^2 = 324$) Bonus Soru: Toplamları 1000 eden bir başka tam kare çifti daha var. Onları da bulabilir misiniz?

Mental Çarpma

Çarpım tablosunu 1'den 10'a kadar ezberledikten sonra zihninizden herhangi bir çarpma işlemini yapabilirsiniz, en azından yaklaşık değerini tahmin edebilirsiniz. Bundan sonraki adım tek basamaklı sayılarla çift basamaklı sayıların çarpımında ustalaşmak (ezberlememek!). Buradaki kilit fikir soldan sağa doğru çalışmaktır. Örneğin 8 x 24 işlemini yaparken ilk önce 8 x 20 işlemini yapıp daha sonra 8 x 4 işlemini yapıp daha sonra bulduğunuz iki sonucu toplayabilmektir:

$$8 \times 24 = (8 \times 20) + (8 \times 4) = 160 + 32 = 192$$

Bu konuda ustalaştığınız zaman tek basamaklılarla üç basamaklıların çarpımını çalışma zamanınız gelmiştir. Bu seferki biraz daha zahmetli olacak. Çünkü daha fazla şeyi hafızanızda tutmanız gerekiyor. Örneğin, 456 x 7 çarpımında aşağıda gösterildiği gibi önce durup 2800 + 350 topla-

mını yapıp daha sonra 42 ile toplamanız gerekiyor.

```
               456
             x   7
400 x 7 =     2800
 50 x 7 =   +  350
              3150
  6 x 7 =   +   42
              3192
```

Bu büyüklükte soruları da rahatça yapabildiğinizde artık iki basamaklı sayıların çarpımına bakabilirsiniz demektir. Benim için bu nokta eğlencenin başladığı noktadır. Çünkü bu tür problemlere yaklaşmanın birçok yolu vardır. Problemi farklı yollardan çözerken cevabınızı kontrol edebilir ve aynı anda aritmetiğin tutarlılığını fark edebilirsiniz! Bütün yöntemleri tek bir örnekte anlatacağım: 32 x 28. En tanıdık yöntem (kâğıt üzerinde yaptığınız işe en çok benzeyen yöntem) *toplama yöntemi*dir. Burada sayılardan birini (genellikle birler basamağı küçük olanı) iki parçaya ayırıp her parçayı diğer sayıyla çarparız ve çıkan sonuçları toplarız. Örneğin,

$$32 \times 38 = (30 + 2) \times 38 = (30 \times 38) + (2 \times 38) = \cdots$$

Şimdi 30 x 38 çarpımını nasıl bulacağız? İlk önce 3 x 38'i bulalım. Daha sonra sonucun sonuna 0 ekleyelim. $3 \times 38 = 90 + 24 = 114$, yani $30 \times 38 = 1140$ olur. $2 \times 38 = 76$ olduğundan

$$32 \times 38 = (30 \times 38) + (2 \times 38) = 1140 + 76 = 1216$$

çıkar. Böyle bir problemi yapmanın bir diğer yolu da (genellikle sayılardan birinin birler basamağı 7, 8 veya 9 olduğunda) çıkarma yöntemidir. $38 = 40 – 2$ olduğundan

$$38 \times 32 = (40 \times 32) - (2 \times 32) = 1280 - 64 = 1216$$

çıkar.

Toplama ve çıkarma yöntemlerinin zorluğu bir yandan hesaplama yaparken diğer yandan büyük bir sayıyı aklınızda tutmanız (1140 ya da 1280 gibi) gerekmesidir. Bu zor olabilir. İki basamaklı sayıların çarpımında benim tercih ettiğim yöntem çarpanlara ayırma yöntemidir. Bu yöntem özellikle de çarpanları tek basamaklı olan sayılar için kullanışlıdır. Bizim örneğimizde 32 sayısı 4 x 8 olarak yazılabilir. Sonuç olarak,

$$38 \times 32 = 38 \times 8 \times 4 = 304 \times 4 = 1216$$

olur. 32 sayısını 4 x 8 şeklinde çarpanlarına ayırırsak, 38 × 4 × 8 = 152 × 8 = 1216 sonucuna ulaşırız. Fakat ben iki basamaklı sayıyı büyük çarpanla çarpmayı tercih ediyorum. Böylece bir sonraki sayı (genelde üç basamaklı olan sayı) küçük çarpanla çarpılmış oluyor.

KOYU MATEMATİK

Çarpanlarına ayırma yöntemi 11 ile çarparken de işe yarıyor. Çünkü 11 ile çarpma için özel bir yöntem var: 11 ile çarptığınız sayıyı oluşturan rakamları toplayın. Daha sonra bulduğunuz sonucu rakamların ortasına yazın. Örneğin, 53 x 11 çarpımında 5 + 3 = 8 buluruz. Çarpımın cevabı da 583 çıkar. 27 x 11 de 2 + 7 = 9 olduğundan sonuç 297 çıkar. Peki ya rakamların toplamı 9 dan büyük olursa ne olur? Bu durumda bulduğumuz toplamın birler basamağındaki rakamı alırız ve sayımızdaki soldaki ilk rakamı 1 artırırız. Mesela 48 x 11 çarpımında 4 + 8 = 12 çıkar. O zaman sonuç 528 olur. Benzer bir şekilde 74 x 11 = 814 çıkar. Bu yöntem 11 in katları için de geçerlidir. Örneğin,

$$74 \times 33 = 74 \times 11 \times 3 = 814 \times 3 = 2442.$$

İki basamaklı sayıları çarparken bir başka yöntem ise *birbirlerine yakın tut* yöntemidir. Her iki sayının onlar basamağı aynı ise bu yöntemi kullanabilirsiniz. Yöntemi ilk kez uygularken size sihirli bir şeymiş gibi görünecek. Örneğin,

$$38 \times 32 = (30 \times 40) + (8 \times 2) = 1200 + 16 = 1216$$

işleminin basitliğine inanır mıydınız? Yukarıdaki örnekte birler basamaklarının toplamı 10 olduğundan işlem çok kolaylaşır. (Her iki sayı 3 ile başlar ve birler basamaklarının toplamı 10'dur.) Bir başka örnek ise,

$$83 \times 87 = (80 \times 90) + (3 \times 7) = 7200 + 21 = 7221$$

İki sayının birler basamakları toplamı 10 etmese bile hesaplama çok basittir. 41 x 44 çarpımı için küçük sayıyı 1 azaltırsanız (bir yuvarlak sayı olan 40'a ulaşmak için) o zaman büyük sayıyı 1 artırmak zorunda kalırsınız. Sonuç olarak,

$$41 \times 44 = (40 \times 45) + (1 \times 4) = 1800 + 4 = 1804$$

olur.

34 x 37 için ise 34'ü 4 azaltırsanız (30'a ulaşmak için) ve 37 + 4 = 41 ile çarparsanız ve son olarak 4 x 7 ile toplarsanız

$$34 \times 37 = (30 \times 41) + (4 \times 7) = 1230 + 28 = 1258$$

eşitliğine ulaşırsınız.

Bu arada daha önce gördüğümüz 104 x 109'un gizemli çarpımı aslında bu aynı yöntemin bir uygulamasıdır.

$$104 \times 109 = (100 \times 113) + (04 \times 09) = 11300 + 36 = 11336$$

Bazı okullar öğrencilerden 20'ye kadar bütün çarpım tablosunu ezberlemelerini isterler. Bütün bu çarpımları ezberlemek yerine bu yöntemi kullanarak istenen çarpımları istenen çabuklukta yapabiliriz. Mesela,

$$17 \times 18 = (10 \times 25) + (7 \times 8) = 250 + 56 = 306$$

Peki, ama bu gizemli yöntem neden işe yarıyor? Bu durumu açıklamak için biraz cebir bilgisine ihtiyacımız var. Bu bilgiyi 2. Bölüm'de anlatacağız. Bu bilgiyi öğrendikten sonra hesaplamak için yeni yollar keşfedeceğiz. Mesela son sorunun nasıl aşağıdaki gibi de çözülebileceğini göreceğiz:

$$18 \times 17 = (20 \times 15) + ((-2) \times (-3)) = 300 + 6 = 306$$

Çarpım tablosundan bahsetmişken bir sonraki sayfada görebileceğiniz size daha önce sözünü ettiğim çarpım tablosuna bir bakın. Genç Gauss'u cezbedecek sorulardan biri şu olurdu herhalde: Çarpım tablosundaki bütün sayıların toplamı kaçtır? Kendinize bir dakika zaman verin ve bu sorunun zarif bir çözümünü bulmaya çalışın. Bu bölümün sonunda size bir çözüm vereceğim.

Mental Kestirim ve Mental Bölme

İşe bize okulda nâdiren öğretilen çok basit bir soru ve onun çok basit cevabıyla başlayalım:

(a) 3 basamaklı iki sayıyı çarptığımızda bana hemen sonucun kaç basamaklı olacağını söyleyebilir misiniz?

Ve bir sonraki soru:

(b) Dört basamaklı bir sayıyla beş basamaklı bir sayıyı çarptığımızda sonuç kaç basamaklı olabilir?

Okulda çarpma ya da bölme sorularında basamakları oluşturmaya çok zaman ayırıyoruz ama cevabın önemli sonuçlarını düşünmeye çok az vakit ayırıyoruz. Bütün bunlara rağmen cevabın basamak sayısını yaklaşık olarak bulmak, cevabın ilk ya da son basamağını bilmekten çok daha önemli-

dir. (Cevabın 3 ile başladığını bilmek cevabın 30000, 300000 ya da 3000000 gibi sayılara yakın olduğunu bilmediğinizde çok anlamsız olur.)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Çarpım tablosunda bulunan 100 sayının toplamı kaçtır?

(a) sorusunun cevabı beş ya da altı basamaktır. Neden böyle olsun ki? Olabilecek en küçük sayı 100 x 100 = 10000'dir. Bu sayının da beş basamağı vardır. Olabilecek en büyük sayı ise 999 x 999'dur. Bu çarpım ise açık bir şekilde 1000 x 1000 = 1000000'dan küçüktür. Bu sayı da yedi basamaklıdır (Neredeyse yedi basamaklı olmayacakmış!). 999 x 999 bu sayıdan küçük olduğundan 6 basamaklı olmalıdır (Bu arada tabii ki 999 x 999 çarpımının cevabını kafanızdan yapabilirsiniz: $999^2 = (1000 \times 998) + 1^2 = 998001$). Kısaca iki tane üç basamaklı sayının çarpımı ya beş basamaklıdır ya da altı basamaklıdır.

(b) sorusunun cevabı sekiz veya dokuz basamaktır. Neden böyle olsun ki? En küçük dört basamaklı sayı 1000 yani 10^3'tür. **(1 sayısının arkasında üç tane sıfır vardır.) En küçük beş basamaklı sayı ise 10000 yani 10^4'tür. Yani en küçük çarpım $10^3 \times 10^4 = 10^7$'dir** ve bu sayının sekiz basamağı vardır. (10^7 nereden çıktı diye soracak olursanız:

$$10^3 \times 10^4 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 10^7)$$

En büyük çarpım ise 10 basamaklı bir sayı olan $10^4 \times 10^5 = 10^9$ sayısından kıl payı daha azdır. Yani cevap en fazla dokuz basamaklıdır. Bu fikri kullanarak basit bir kurala ulaşabiliriz: **m basamaklı bir sayı ile n basamaklı bir sayının çarpımı $m + n$ ya da $m + n - 1$ basamaklıdır.**

Çarpımdaki sayıların baş basamaklarına bakıp sonucun kaç basamaklı

çıkacağını anlamak genellikle kolaydır. Baş basamaklardaki rakamların çarpımı 10 ya da daha fazla ise çarpımın $m + n$ basamaklı olacağı kesindir. (Örneğin, 271 x 828'de baş basamakların çarpımı 2 x 8 = 16'dır. Yani çarpım altı basamaklıdır. Baş basamakların çarpımı 4 ya da daha küçük ise çarpımın $m + n - 1$ basamaklı çıkacağı kesindir. Örneğin 314 x 159 çarpımının sonucu beş basamaklıdır. Eğer baş basamakların çarpımı 5, 6, 7, 8 ya da 9 ise biraz daha incelememiz gerekir. Örneğin 222 x 444 çarpımı beş basamaklıdır fakat 234 x 456 çarpımı altı basamaklıdır. Her iki cevap da 100000 sayısına çok yakındır. Aslında önemli olan tek şey de budur.)

Bu kuralı tersine çevirerek bölme için daha basit bir kural buluruz: **m basamaklı bir sayı n basamaklı bir sayıya bölündüğünde çıkan sonuç ya $m - n$ ya da $m - n - 1$ basamaklıdır.**

Örneğin, dokuz basamaklı bir sayı beş basamaklı bir sayıya bölündüğünde çıkan sonuç ya beş basamaklı ya da dört basamaklıdır. Hangi cevabın doğru olduğunu anlamanın kuralı çarpmada uyguladığımız kuraldan daha basittir. Baştaki rakamları çarpmak ya da bölmek yerine sadece rakamları karşılaştıracağız. Bölünen sayının baş basamağı bölen sayının baş basamağından daha küçükse bölüm $(m - n)$ basamaklı olur. Bölünen sayının baş basamağı bölen sayının baş basamağından büyükse bölüm $(m - n - 1)$ basamaklıdır. Eğer baş basamaklar eşit ise onlardan sonra gelen basamağa bakılır ve aynı kural uygulanır. Örneğin, 314159265 sayısının 12358 sayısına bölündüğünde bölüm beş basamaklı çıkar. Fakat 12358 sayısı yerine 62831 sayısına bölündüğünde bölüm dört basamaklıdır. 161803398 sayısı 14142 sayısına bölündüğünde bölüm beş basamaklı çıkar. Çünkü 16 sayısı 14'ten büyüktür.

Mental bölmenin detaylarını size anlatmayacağım çünkü aslında kalem kâğıtta yaptığınız şeye çok benziyor. (Aslında kâğıtta yaptığınız herhangi bir bölme işlemi yöntemi cevabı soldan sağa bulmanızı gerektirir!) Fakat size bazı zamanlar size kolaylık sağlayabilecek kısa yollar vereyim.

Bir sayıyı 5'e (ya da sonu 5'le biten herhangi bir sayıya) böldüğümüzde böleni ve bölüneni iki katına çıkardığımızda soru genelde daha basit hale gelir. Örneğin:

$$34 \div 5 = 68 \div 10 = 6.8$$
$$123 \div 4.5 = 246 \div 9 = 82 \div 3 = 27\frac{1}{3}$$

Böleni ve bölüneni iki katına çıkardığınızda hem 246'nın hem de 9'un 3 ile

bölündüğünü fark etmiş olmalısınız, bu yüzden her iki sayıyı da 3 ile sadeleştirebiliriz. (Bu konuyu 3. Bölüm'de daha detaylı olarak ele alacağız.)

KOYU MATEMATİK

1'den 10'a kadar olan sayıların çarpımsal terslerine bir bakalım:

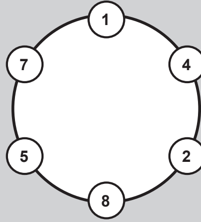
1/2 = 0.5, 1/3 = 0.333 . . . , 1/4 = 0.25, 1/5 = 0.2

1/6 = 0.1666 . . . , 1/8 = 0.125, 1/9 = 0.111 . . . , 1/10 = 0.1

Yukarıdaki ondalık açılımların hepsi ya sonludur ya da ikinci terimden sonra devreder. Fakat buna uymayan tek bir garip istisna vardır: 1/7 kesrinin ondalık açılımı 6 basamaktan sonra devreder:

1/7 = 0.142857 142857 . . .

(Bütün bu çarpımsal terslerin bu kadar çabuk sonlanmasının nedeni 2'den 11 sayısına kadar bütün sayıların 10, 100, 1000, 9, 90, ya da 99'u bölmesidir. Fakat 7 sayısının böldüğü ilk güzel sayı 999999'dur.) 1/7 kesrinin ondalık açılımdaki rakamları bir çembere yazdığımızda sihirli bir şey ortaya çıkar:



7. Çember

Buradaki olağanüstü şey paydası 7 olan diğer kesirlerin ondalık açılımlarının da bu çemberde belli bir noktadan başlayarak oluşturulabileceğidir. Örneğin,

1/7 = 0.142857 142857 . . . , 2/7 = 0.285714 285714 . . . ,

3/7 = 0.428571 428571 . . . , 4/7 = 0.571428 571428 . . . ,

5/7 = 0.714285 714285 . . . , 6/7 = 0.857142 857142 . . .

Bu bölümü birkaç sayfa önce sorduğumuz soru ile bitirelim. *Çarpım Tablosunda yazan sayıların toplamı kaçtır?* Soruyu ilk kez okuduğunuzda sanki ilk 100 sayının toplamını almak gibi heyecan verici gözükür. Sayılar dans ettiğinde ortaya çıkan güzel örüntülere daha fazla aşina oldukça bu

soruya daha güzel bir cevap verme şansımız artar.

İlk satırdaki sayıları toplayarak işe başlayacağız. Gauss'un (ya da üçgensel sayı formülünün ya da sadece basit toplamanın) bize söylediği gibi:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

İkinci satırdaki toplam nasıldır?

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 20 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = 2 \times 55$$

Aynı mantığı kullanarak üçüncü satırdaki toplam 3 x 55 olmalıdır. Bütün satırlarda aynı mantığı kullandığımızda bütün bu sayıların toplamını

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \times 55 = 55 \times 55 = 55^2$$

olarak buluruz. Buradan sonrasını da artık kafanızdan yapabilirsiniz... 3025!

İKİNCİ BÖLÜM

$$\frac{2n + 4}{2} - n = 2$$

Cebirin Sihri

Sihirli Giriş

Cebirle ilk karşılaşmam çocukken babamdan aldığım bir ders sayesinde oldu. Bana bir keresinde "Cebir yapmak aritmetik yapmakla aynı şeydir, sadece sayılar yerine harfleri kullanırsın. Mesela $2x + 3x = 5x$ ve $3y + 6y = 9y$. Anladın mı?" diye sordu. Ben de "Sanırım anladım" dedim. "O zaman $L + L$ kaça eşittir?" diye sordu. Güven dolu bir sesle "iki L eder." dedim. "Seni duyamadım, daha yüksek bir sesle söyleyebilir misin?" dedi. Bağırarak "İKİ LE eder!" dedim ve en sonunda "Öğrendiğine göre asıl sen "ikile!'' dedi. (Babam her zaman kelime oyunlarına, şakalara, hikâyelere matematik öğretmekten daha fazla ilgi duymuştu. En baştan beri bundan şüphelenmeliydim!)

Cebir ile olan ikinci deneyimim aşağıdaki sihir numarasını anlamakla oldu.

1. Adım: 1'den 10'a kadar bir sayı tutun (aslında eğer isterseniz daha büyük bir sayı da olur).
2. Adım: Tuttuğunuz sayıyı iki katına çıkarın.
3. Adım: 10 ekleyin.
4. Adım: 2'ye bölün.
5. Adım: Şimdi bulduğunuz sayıyı ilk tuttuğunuz sayıdan çıkarın.

5 sayısını buldunuz değil mi? Bu sihirli numaranın arkasındaki sır ne? Cebir. Şimdi bu numarayı daha detaylı bir şekilde 1. Adımdan başlayarak adım adım inceleyelim. Sihir numarasında hangi sayıyla başladığınızı bilmiyorum. Bu yüzden o sayıya N diyelim. Bilinmeyen bir sayı bir harfle temsil edildiğinde o harfe *değişken* denir.

2. Adımda sayıyı iki katına çıkardınız. O zaman sayımız $2N$ oldu (burada sayımızı 2 ile çarparken çarpma işaretini yazmıyoruz. Çünkü cebirde x işareti sıklıkla değişken olarak kullanılıyor). 3. Adımda sayınız $2N + 10$ oldu. 4. Adımda sayıyı ikiye bölerek $N + 5$'e ulaştık. Son olarak bulduğumuz sayıyı ilk sayımız olan N'den çıkardık ve 5 sayısını bulduk. Aşağıdaki tabloda bütün bu dediklerimi özetleyebiliriz.

1. Adım	N
2. Adım	$2N$
3. Adım	$2N + 10$
4. Adım	$N + 5$
5. Adım	$N + 5 - N$
Cevap	5

Cebirin Kuralları

Bir bilmece ile başlayalım. 5 eklediğinizde üç katına çıkan sayı kaçtır?

Bulmacayı çözmek için ilk önce bilinmeyen sayımıza x diyelim. Buna 5 eklersek $x + 5$'e ulaşırız. İlk sayımızın 3 katı bize $3x$'i verir. Biz bulduğumuz bu iki şeyin birbirine eşit olmasını istiyoruz. Kısacası

$$3x = x + 5$$

denklemini çözmek istiyoruz. Eşitliğin her iki tarafından x çıkarırsak

$$2x = 5$$

eşitliğine ulaşırız. ($2x$ de nereden çıktı? $3x - x$ ile $3x - 1x$ aynı şeydir. Bu işlemin sonucu da $2x$ çıkar.) Eşitlikte her iki tarafı da 2'ye bölersek

$$x = 5/2 = 2.5$$

eşitliğine ulaşırız. Bulduğumuz cevabı kontrol etmek için sayımızı x yerine yazarız. $2.5 + 5 = 7.5$ olur ve gerçekten de 7.5 sayısı 2.5 sayısının 3 katıdır.

KOYU MATEMATİK

Cebirin bize açıklamakta yardım edeceği size başka bir sihir numarası göstereyim. Herhangi üç basamaklı bir sayı yazın fakat rakamlar soldan sağa olarak büyükten küçüğe doğru yazılsın. Mesela, 842 ya da 951. Sonra bu sayının rakamlarını küçükten büyüğe olacak şekilde yerlerini değiştirin. Yeni bulduğunuz üç basamaklı sayıyı ilk sayıdan çıkarın. Cevabınız her neyse tekrar sayıların yerlerini sondan başa doğru değiştirin ve bu iki sayıyı toplayın. Bütün bu dediklerimizi 853 sayısında gösterelim.

$$\begin{array}{rr} 853 \\ -\ \underline{358} \\ 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 495 \\ \underline{+594} \\ 1089 \end{array}$$

Şimdi bunu başka bir sayı için deneyin. Ne buldunuz? Şaşırtıcı bir şekilde komutları doğru bir şekilde takip ederseniz her zaman 1089 bulacaksınız. Neden böyle oluyor?

Cevabınız cebirde! Diyelim ki $a > b > c$ ve siz abc gibi üç basamaklı bir sayıyla başladınız. 853 sayısının 853 = (8 × 100) + (5 × 10) + 3 şeklinde yazılması gibi abc sayısı da 100a + 10b + c şeklinde yazılabilir. Basamakların yerlerini değiştirdiğimizde cba sayısını buluruz. Bu sayıyı da 100c + 10b + a şeklinde yazarız. Bu iki sayıyı birbirinden çıkardığımızda

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$

$$= (100a - a) + (10b - 10b) + (c - 100c)$$

$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

buluruz. Bir diğer deyişle bu iki sayının farkı 99'un bir katı olmak zorundadır. İlk sayımızın rakamları büyükten küçüğe doğru gittiğinden a – c en az 2 olmalıdır. Yani bu fark 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ya da 9 olabilir. Bunun sonucu olarak çıkarma yaptığımızda aşağıdaki sayılardan birini bulmamız kesindir:

198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 ya da 891

Bütün bu durumlarda her bir sayıyı rakamları ters şekilde yazılmış haliyle toplayınca

198 + 891 = 297 + 792 = 396 + 693 = 495 + 594 = 1089

hep 1089 sayısını buluruz.

Cebirin altın kuralı olarak adlandırdığım, **eşitliğin bir tarafına bir şey yaparsanız diğer tarafına da aynı şeyi yapın,** kuralını az önce göstermiş olduk.

Örneğin,

$$3(2x + 10) = 90$$

denkleminde x'i bulmaya çalışıyorsunuz. Hedefimiz x'i yalnız bırakmak. İlk adım olarak her iki tarafı 3'e bölelim. Böylece denklem

$$2x + 10 = 30$$

haline gelsin. Şimdi sol taraftaki 10 sayısından kurtulmak için her iki taraftan 10 çıkaralım. Bunu yaptığımızda

$$2x = 20$$

eşitliğine ulaşırız. Son olarak, her iki tarafı 2'ye bölerek

$$x = 10$$

eşitliğine ulaşırız. Bulduğunuz cevabı kontrol etmek her zaman iyi bir fikirdir. $x = 10$ olunca ne olduğuna bir bakalım. $3(2x + 10) = 3(30) = 90$. Tam istediğimiz şey. Bu denklem için başka çözüm var mı? Hayır. Çünkü eğer öyle bir x olsaydı bulduğumuz diğer alt denklemleri de sağlamak zorundaydı. Kısacası $x = 10$ elimizdeki tek çözüm.

Şimdi size gerçek hayattan bir cebir problemi anlatayım. *New York Times* gazetesinde 2014'te yazan bir habere göre yapımcılığını Sony Pictures'ın yaptığı The *Interview* filmi ilk 4 gün içinde elektronik satıştan ve kiralamadan 15 milyon dolar kazanmış. Sony bu paranın ne kadarının 15 dolarlık çevrimiçi satışlardan ya da 6 dolarlık çevrimiçi kiralama bedelinden geldiğini açıklamamış. Fakat stüdyo bu işlemlerin ortalama 2 milyon civarı olduğunu söylemiş. Bu haberdeki satış sayılarını bulmak için S çevrimiçi satışları, R ise çevrimiçi kiralama bedelini temsil etsin. 2 milyon işlem olduğuna göre

$$S + R = 2000000$$

olur. Her bir satış 15 dolar ve her kiralama bedeli 6 dolar olduğuna göre toplam hasılat

$$15S + 6R = 15000000$$

olur. İlk denklemden

$$R = 2000000 - S$$

sonucuna ulaşırız. Bu sonuç bizim ikinci denklemi

$$15S + 6(2000000 - S) = 15000000$$

ya da 15S + 12000000 − 6S = 15000000 şeklinde yazmamızı sağlar. Bu denklemde yalnızca S değişkeni vardır. Denklemi biraz daha düzenlediğimizde

$$9S + 12000000 = 15000000$$

buluruz. Her iki taraftan 12000000 çıkardığımızda

$$9S = 3000000$$

buluruz. Kısacası S yaklaşık olarak bir milyonun üçte biridir. Yani $S \approx 333333$ ve $R = 2000000 - S \approx 1666667$. (Kontrol: Toplam Satış 15(333333) \$ + 6(1666667) \$ ≈ 15000000 \$.)

Şimdi bu kitapta uzun süredir sürekli yaptığımız ama adını hiç anmadığımız, çarpma ve toplamanın bir arada iyi bir şekilde çalışmasını sağlayan **dağılma kuralı**nı konuşma zamanı geldi. Dağılma kuralı, herhangi *a, b, c* sayıları için

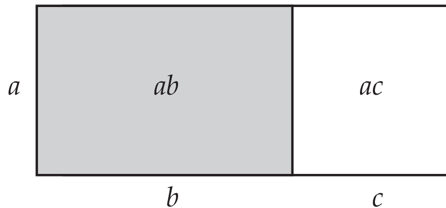
$$a(b + c) = ab + ac$$

olarak yazılır. Tek basamaklı bir sayıyı iki basamaklı bir sayıyla çarparken aslında bu kuralı kullandık. Örneğin,

$$7 \times 28 = 7 \times (20 + 8) = (7 \times 20) + (7 \times 8) = 140 + 56 = 196.$$

Saymayı düşündüğümüzde aslında insana çok mantıklı gelir. Diyelim ki, 7 çanta dolusu bozuk param var ve her çantada 20 altın 8 gümüş bozuk para var. Bütün bozuk paralar kaç tanedir? Bir yandan her çantada 28 bozuk para var yani kısaca bütün paralar 7 × 28'den bulunur. Diğer yandan ise 7 × 20 altın para ve 7 × 8 gümüş para olduğundan bütün paralar (7 × 20) + (7 × 8) şeklinde bulunur. Sonuç olarak, 7 × 28 = (7 × 20) + (7 × 8) çıkar.

Dağılma kuralını, aşağıdaki resimde göreceğiniz üzere, bir dikdörtgenin alanına iki farklı perspektiften bakarak geometrik olarak gözlemleyebilirsiniz.



Dikdörtgen dağılma kuralını gösterir: $a(b + c) = ab + ac$

Bir yandan dikdörtgenin alanı $a(b + c)$'dir. Diğer yandan dikdörtgenin sol parçasının alanı ab, sağ parçasının alanı ise ac dir. Kısaca bütün alan $ab + ac$ olur. Bu şekil a, b, c pozitif sayılar olduğu durumda dağılma kuralını gösterir.

Bu arada, bazı zamanlar dağılma kuralını değişkenlerle sayılara aynı anda uygularız. Mesela,

$$3(2x + 7) = 6x + 21 .$$

Bu denklem soldan sağa yorumlandığında $2x + 7$'yi 3 ile çarptığımız anlaşılır. Denklemi sağdan sola yorumladığımızda ise $6x + 21$'i hem $6x$'ten hem de 21'den 3 çarpanını "ayırarak" çarpanlarına ayırmışız gibi anlaşılır.

KOYU MATEMATİK

İki negatif sayının çarpımı neden pozitif olur? Mesela neden (-5) x (-7) = 35 olsun ki? Öğretmenler bu durumu açıklamak için sadeleştirmelerden basitçe "bu da böyle bir şey işte" ye kadar birçok farklı yol kullanırlar. Fakat asıl neden bizim dağılma kuralının sadece pozitif sayılar için değil, aslında bütün sayıları için doğru olmasını istediğimizden kaynaklanır. Ve eğer dağılma kuralının negatif sayılar (ve sıfır) için doğru olmasını istiyorsanız bunun sonuçlarına katlanmak zorundasınız. Şimdi neden olduğuna bakalım. Diyelim ki -5 x 0 = 0 ve -5 x 7 = -35 olduğu gerçeğini kabul ettiniz. (Birazdan uygulayacağımız stratejiyi kullanarak bu iki eşitlik de kanıtlanabilir. Fakat birçok insan bu gerçekleri kabul ederek mutlu oluyor) şimdi şu denkleme bakalım:

$$-5 \times (-7 + 7)$$

Bu denklemin sonucu kaçtır? Bir taraftan bu sadece -5 x 0'dır ki bunun sonucu 0 çıkar. Diğer yandan dağılma kuralından dolayı bu denklem

$$((-5) \times (-7)) + (-5 \times 7)$$

eşit olmalıdır.

Bu yüzden,

$$((-5) \times (-7)) + (-5 \times 7) = ((-5) \times (-7)) - 35 = 0$$

çıkar. Ve $((-5) \times (-7)) - 35 = 0$ olduğundan $(-5) \times (-7) = 35$ eşitliğine ulaşırız. Genel olarak her a ve b sayısı için

$$(-a) \times (-b) = ab$$

olur.

FOIL Sihri

Dağılma kuralının önemli sonuçlarından biri ise cebirin **FOIL kuralı**dır. FOIL kuralı herhangi bir a, b, c, d sayıları veya değişkenleri için

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

olduğunu söyler. FOIL kuralında çarparken F, birinci çarpanın ilk terimiyle ikinci çarpanın ilk terimi, O, birinci çarpanın ilk terimiyle ikinci çarpanın ikinci terimi, I, birinci çarpanın ikinci terimiyle ikinci çarpanın ilk terimi, L, birinci çarpanın ikinci terimiyle ikinci çarpanın ikinci terimidir. (Aslında bu kural, İngilizce'de tam da bu açıklamaya karşılık gelen şu tümcenin baş harfleridir "**F**irst-**O**uter-**I**nner-**L**ast".)

Örnek vermek gerekirse, iki sayıyı FOIL yöntemiyle çarpalım:

$$\begin{aligned} 23 \times 45 &= (20 + 3)(40 + 5) \\ &= (20 \times 40) + (20 \times 5) + (3 \times 40) + (3 \times 5) \\ &= 800 + 100 + 120 + 15 \\ &= 1035 \end{aligned}$$

KOYU MATEMATİK

FOIL neden doğrudur? Dağılma kuralından

$$(a + b)e = ae + be$$

olur. Şimdi e yerine c + d, yazdığımızda

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

olur. Burada son eşitlik dağılma kuralının tekrar uygulanmasından ortaya çıkar. Eğer bu açıklama size yeterli gelmediyse bir de geometrik açıklamaya bakın. (a, b, c, d pozitif sayılar olduğunda). Aşağıdaki dikdörtgenin alanını iki farklı şekilde bulmaya çalışın.

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Bir taraftan dikdörtgenin alanı $(a + b)(c + d)$ çıkar. Diğer taraftan büyük dikdörtgeni alanları ac, ad, bc ve bd olan dört parçaya ayırabilirsiniz. O zaman büyük dikdörtgenin alanı $ac + ad + bc + bd$ olur. Bulduğumuz bu iki sonucu birbirine eşitlersek FOIL kuralını buluruz.

Şimdi size FOIL in sihirli bir uygulamasını göstereceğim. İki zar atın ve aşağıdaki tabloda yazan talimatları uygulayın. Örnek olarak, diyelim ki zar attınız. Zarların üst kısmı 6 - 3 geldi. Alttaki sayılar ise 1 - 4 oldu. (Üstü 6 gelen zarın altında 1 vardır, üstü 3 gelen zarın alt tarafında ise 4 vardır.)

Zarları Atın (Diyelim ki 6 - 3):	
Üstte yazan sayıları birbiriyle çarpın:	6 x 3 = 18
Altta yazan sayıları çarpın:	1 x 4 = 4
1. zarın üstünde yazan sayı ile 2. zarın altındaki sayıyı çarpın:	6 x 4 = 24
1. zarın altındaki sayı ile 2. zarın üstündeki sayıyı çarpın:	1 x 3 = 3
Toplam	49

Örneğimizde 49 sayısını bulduk. Herhangi bir çift zarla kendi kendinize tabloda yazanları uygularsanız siz de aynı sonuca ulaşırsınız. Bu durum bir zarın zıt iki tarafındaki yazan sayıların toplamının 7 olmasından kaynaklanıyor. Yani zarda x - y gelirse alt kısımlarda 7 - x ve 7 - y olmalı. Bu yüzden cebir kullanarak tablomuz şu hale gelir:

Zarları atın (diyelim ki x ve y):			
Üstte yazan sayıları birbiriyle çarpın:	xy	=	xy
Altta yazan sayıları çarpın:	$(7-x)(7-y)$	=	$49-7y-7x+xy$
1. zarın üstünde yazan sayı ile 2. zarın altındaki sayıyı çarpın:	$x(7-y)$	=	$7x-xy$
1. zarın altındaki sayı ile 2. zarın üstündeki sayıyı çarpın:	$y(7-x)$	=	$7y-yx$
Toplam			49

Üçüncü satırda FOIL'i nasıl kullandığımızı fark ettiniz mi? (- x ile - y'nin çarpımı xy etti.). Biraz daha az cebir bilgisi kullanarak, sadece ikinci satıra baktığımızda FOIL kullanarak yaptığımız $(x + (7-x))(y + (7-y)) = 7 \times 7 = 49$ işleminin ilk 4 terimi olduğunu fark ederseniz 49'a yine ulaşabilirsiniz.

Birçok cebir dersinde FOIL aşağıdaki gibi ifadeleri çarpmak için kullanılır.

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

Dikkat ederseniz son ifademizde 7 (yani x'li ifadenin *katsayı*sı) aslında 3 ve 4'ün toplamıdır. Son terim (*sabit terim*) ise aslında 3 ve 4'ün çarpımı-

dır. Biraz çalışmayla çarpımı hemencecik yazabilirsiniz. Mesela 5 + 7 = 12 ve 5 x 7 = 35 olduğundan

$$(x + 5)(x + 7) = x^2 + 12x + 35$$

sonucunu buluruz. Bu durum negatif sayılar için de geçerlidir. Biraz örnek verelim. İlk örneği sizin için yapalım diğer örneklere siz bakın: 6 + (−2) = 4 ve 6 × (−2) = −12

$$(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12$$

$$(x + 1)(x - 8) = x^2 - 7x - 8$$

$$(x - 5)(x - 7) = x^2 - 12x + 35$$

Şimdi de sayıların aynı olduğu örneklere bakalım:

$$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$$

$$(x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5) = x^2 - 10x + 25$$

Dikkat ederseniz $(x + 5)^2 \neq x^2 + 25$. Bu hata cebir dersi alan çoğu öğrencinin yaptığı ortak hatalardan biridir. Öte yandan sayılar zıt işaretli ise oldukça ilginç bir şey ortaya çıkar. Mesela, 5 + (−5) = 0, olduğundan

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25$$

çıkar.

Genel olarak kareler farkı formülü hatırlamaya değer bir şeydir:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Biz bu formülü 1. Bölüm'de sayıların karelerini hızlıca alırken kullandık. Yöntem aşağıdaki cebir bilgisine dayanır:

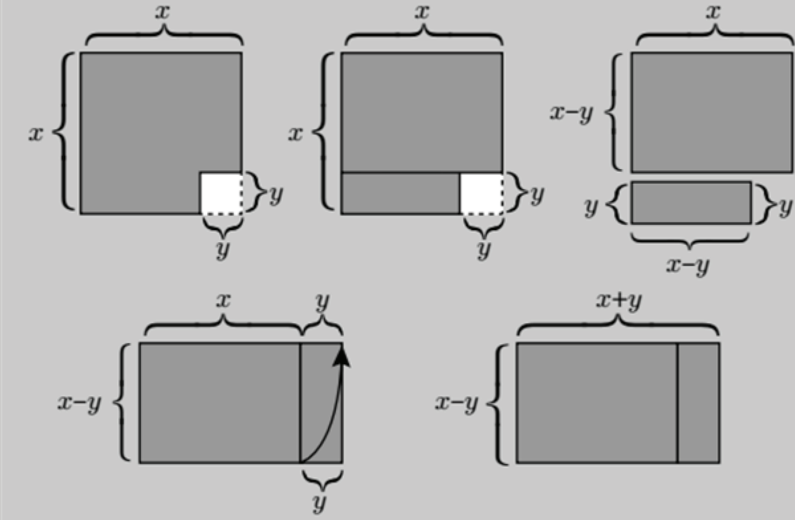
$$A^2 = (A + d)(A - d) + d^2$$

Şimdi bu formülü doğrulayalım. Kareler farkı formülünden $[(A + d)(A - d)] + d^2 = [A^2 - d^2] + d^2 = A^2$ sonucu çıkar. Bu yüzden formül A'nın ve d'nin bütün değerleri için doğrudur. Aslında pratikte A karesi alınan sayı, d ise en yakın kolay sayıya olan mesafedir. Örneğin 97'nin karesini almak için $d = 3$ seçeriz. Böylece

$$\begin{aligned} 97^2 &= (97 + 3)(97 - 3) + 3^2 \\ &= (100 \times 94) + 9 \\ &= 9409 \end{aligned}$$

KOYU MATEMATİK

Kareler farkını resim kullanarak da kanıtlayabiliriz. Aşağıdaki resim, alanı $x^2 - y^2$ olan bir şeklin nasıl kesilip tekrar düzenlendiğinde alanı $(x + y)(x - y)$ olan bir dikdörtgen elde edebileceğimizi gösteriyor.



1. Bölüm'de birbirine yakın sayıların nasıl çarpılacağına dair bir yöntem de öğrendik. 100'e yakın sayılara ya da aynı rakamla başlayan sayılara odaklandık. Fakat bunun arkasındaki cebir bilgisini anladığımız zaman o bilgiyi daha farklı durumlara da uygulayabiliriz. Birbirine yakın olma yönteminin ardındaki cebir bilgisi şöyledir:

$$(s + a)(s + b) = s(s + a + b) + ab.$$

Bu formül doğrudur. Çünkü $(s + a)(s + b) = s^2 + sb + sa + ab$ olur ve ilk üç terimdeki s terimini ortak parantez yöntemiyle dışarıya alabiliriz. Formül her sayı için çalışır fakat biz genelde s'yi sonu 0 ile biten sayılar için kullanırız. (Bu yüzden ben de bu formülde s harfiyle gösterdim.) Örneğin, 43 x 48 probleminde $s = 40$, $a = 3$, $b = 8$ alırız. O zaman formülümüz bize

$$\begin{aligned} 43 \times 48 &= (40 + 3)(40 + 8) \\ &= 40(40 + 3 + 8) + (3 \times 8) \\ &= (40 \times 51) + (3 \times 8) \\ &= 2040 + 24 \\ &= 2064 \end{aligned}$$

çıkması gerektiğini söyler. Çaptığımız iki sayı 43 ve 48'in toplamı 43 + 48 = 91 çıkar. Dikkat ederseniz çarptığımız kolay sayıların toplamı 40 ve 51'in toplamı da 40 + 51 = 91 çıkar. Bu bir tesadüf değildir. Çünkü cebir bize çarpılan sayıların toplamının $(s + a) + (s + b) = 2s + a + b$ olduğunu söyler ve bu sonuç aslında s ve $s + a + b$ kolay sayılarının da toplamına eşittir. Bu cebir bilgisiyle kolay sayıları da yuvarlayabileceğimizi görürüz. Örneğin, son çarpma işlemi, $s = 50$, $a = -7$ ve $b = -2$ şeklinde de olabilirdi. Böylece ilk çarpımımız 50 x 41 olurdu (41 sayısına kolay yoldan ulaşmanın bir yolu da 43 + 48 = 50 + 41 eşitliğini kullanmaktır).

Bu nedenle,

$$\begin{aligned} 43 \times 48 &= (50 - 7)(50 - 2) \\ &= (50 \times 41) + (-7 \times -2) \\ &= 2050 + 14 \\ &= 2064 \end{aligned}$$

olur.

KOYU MATEMATİK

Bölüm 1'de bu yöntemi 100 sayısından biraz büyük olan sayıları çarpmak için kullanmıştık. Fakat aslında bu yöntem 100 sayısından biraz küçük olan sayılar için de geçerlidir. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
96 \times 97 &= (100 - 4)(100 - 3) \\
&= (100 \times 93) + (-4 \times -3) \\
&= 9300 + 12 \\
&= 9312
\end{aligned}
$$

96 + 97 = 193 = 100 + 93 olduğuna dikkat edin. (Aslında pratik olarak 6 + 7 işlemini yaptım. Çünkü 100 sayısı ile sonu 3 ile biten bir sayıyı çarpacağımı biliyordum. O sayı da 93 olmalıydı.) Ayrıca yöntemi bir kere kavradığınız zaman iki negatif sayıyı çarpmanıza gerek kalmaz. O negatif sayıların pozitif değerlerini çarpsanız da olur. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
97 \times 87 &= (100 - 3)(100 - 13) \\
&= (100 \times 84) + (3 \times 13) \\
&= 8400 + 39 \\
&= 8439
\end{aligned}
$$

Bu yöntem 100'den biraz küçük ve 100'den biraz büyük sayılar için de kullanılabilir. Fakat bu sefer yöntemin sonunda çıkartma işlemi yapmanız gerekir. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
109 \times 93 &= (100 + 9)(100 - 7) \\
&= (100 \times 102) - (9 \times 7) \\
&= 10200 - 63 \\
&= 10137
\end{aligned}
$$

Yine 102 sayısı 109 – 7 ya da 93 + 9 ya da 109 + 93 – 100 işlemlerinden bulunabilir. (Ya da sadece son rakamları toplarsınız: 9 + 3 size sayının 2 ile biteceğini söyler. Bu bilgi de sizin için yeterli olabilir.) Yeteri kadar çalışmayla bu yöntemle birbirilerine görece yakın sayıları çarpabilirsiniz. Size iki tane üç basamaklı sayının nasıl çarpıldığını bir örnekle göstereyim. Buradaki durumda a ve b'nin bir basamaklı sayı olmadığına dikkat edin.

$$
\begin{aligned}
218 \times 211 &= (200 + 18)(200 + 11) \\
&= (200 \times 229) + (18 \times 11) \\
&= 45800 + 198 = 45998
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
985 \times 978 &= (1000 - 15)(1000 - 22) \\
&= (1000 \times 963) + (15 \times 22) \\
&= 963000 + 330 = 963330
\end{aligned}
$$

x'i Bulmak

Bu bölümün ilk kısımlarında cebirin altın kuralını kullanarak bazı denklemlerin nasıl çözüldüğüne dair örnekler gördük. Denklem tek bir değişken içeriyorsa (o değişkene x diyelim.) ve eşitliğin her iki tarafında doğrusal denklem (yani bu denklemler x'in katlarını içerebilir fakat x^2 gibi karmaşık ifadeler içermez) olduğunda x'i bulmak kolaydır.

Örneğin,

$$9x - 7 = 47$$

denklemini çözelim. Eşitliğin her iki tarafına 7 ekleyerek $9x = 54$ eşitliğine ulaşırız. Daha sonra her iki tarafı 9'a bölerek $x = 6$ sonucuna ulaşırız.

Biraz daha karmaşık bir soruya bakalım:

$$5x + 11 = 2x + 18$$

Bu soruyu çözmek için basitçe eşitliğin her iki tarafından $2x$'i çıkaralım ve (eğer isterseniz aynı anda) her iki taraftan 11 çıkaralım. Bu durumda

$$3x = 7$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan da $x = 7/3$ eşitliğine ulaşırız. Nihai olarak her doğrusal denklem $ax = b$ (ya da $ax - b = 0$) formuna indirgenebilir. Buradan da $x = b/a$ çözümü bulunur. ($a \neq 0$ olduğunu varsayıyoruz.)

Bu durum *ikinci dereceden denklemlerde* (yani x^2'nin sahneye çıktığı durumlarda) biraz daha karmaşıklaşır. Çözülebilen en kolay ikinci dereceden denklemler

$$x^2 = 9$$

şeklinde olanlardır. Burada iki çözümümüz vardır: $x = 3$ ve $x = -3$. Eşitliğin sağ tarafındaki sayı tam kare sayı olmasa bile yani

$$x^2 = 10$$

şeklindeki gibi bir şey olsa bile yine iki çözümümüz vardır: $x = \sqrt{10} = 3.16\ldots$ ve $x = -\sqrt{10} = -3.16\ldots$ Genel olarak $n > 0$ için $\sqrt{n}$ sayısına *n'nin karekökü* denir ve bu sayının karesi n'yi verir. n tam kare bir sayı olmadığında $\sqrt{n}$ sayısı genellikle hesap makinesiyle bulunur.

KOYU MATEMATİK

x^2 = - 9 denklemi nasıl çözülür? Şimdilik bu denklemin hiç çözümü olmadığını söyleyeceğiz. Aslında hiçbir *reel sayı*nın karesi – 9 etmez. Fakat Bölüm 10'da açık açık bu denklemin $x = 3i$ ve $x = -3i$ gibi iki çözümünün olduğunu söyleyeceğiz. Burada i dediğimiz şey karesi – 1 olan *sanal sayı* dediğimiz şey olacak. Biliyorum ilk başta kulağa imkânsız ve hatta saçma geliyor. Çok haklısınız. Fakat size önceleri okulda *negatif sayı*lar da imkansız görünmüştü değil mi? (Bir sayı nasıl 0'dan küçük olur ki?) Sayılarda mantık aramak istiyorsanız onlara doğru açılardan bakmalısınız.

Ancak

$$x^2 + 4x = 12$$

gibi denklemleri $4x$'li terim yüzünden çözmesi biraz daha zordur ama çözmek için birkaç tane yol vardır. Tıpkı zihinsel matematik gibi problemi çözmek için her zaman birden fazla yol vardır.

Bu tür problemleri çözmek için kullandığım ilk yöntem, adına *çarpanlara ayırma* dediğimiz yöntemdir. İlk adım denklemdeki her şeyi denklemin sol tarafına almaktır. Bu sayede sağ tarafta sadece 0 kalacaktır. Her terimi sol tarafa aldıktan sonra denklem

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

haline gelir. Peki, şimdi ne yapalım? Şansımızın da yardımıyla geçen bölümde FOIL yöntemini kullanırken $x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$ eşitliğini biliyoruz. Bu sayede problemimiz

$$(x + 6)(x – 2) = 0$$

şeklini alır. Böyle bir eşitliğin doğru olabilmesi için çarpanlardan en az birinin 0 olması gerekir. Sonuç olarak ya $x + 6 = 0$ ya da $x – 2 = 0$ olmalıdır. Yani

$$x = - 6 \text{ ya da } x = 2$$

olmalıdır. Bu çözümleri denklemde doğrulayıp problemi çözebilirsiniz.

FOIL'e göre $(x + \text{a})(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ olur. Bu ise ikinci dereceli bu denklemi tıpkı bulmaca çözermiş gibi çarpanlarına ayırmamızı sağlar. Örneğin, son problemde toplamları - 4 ve çarpımları - 12 olan a ve b gibi iki sayı bulmak zorundaydık. $a = - 6$ ve $b = 2$ cevabına ulaşıp çarpanlara ayırabildik. Pratik yapmak için $x^2 + 11x + 24$'ü çarpanlarına ayırmaya ça-

lışın. Bulmacamız toplamları -11 ve çarpımları 24 olan sayıları bulmamızı istiyor. - 3 ve - 8 sayıları bu şartları sağladığı için

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$$

olur.

Şimdi ise elimizde $x^2 + 9x = -13$ denklemi olsun. $x^2 + 9x + 13 = 0$ denklemini çarpanlarına ayırmak için kolay bir yol yoktur. Korkunun ecele faydası yok! Bu gibi durumlarda **ikinci dereceden denklem formülü** imdadımıza yetişir. Formülümüz

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

çözümleri olduğunu söyler. Burada ± işareti "toplama ve çıkarma" anlamına gelir. Size bir örnek verelim. Mesela

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

denkleminde $a = 1$, $b = -4$ ve $c = -12$ olur. Buradan da formülü kullandığımızda

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4$$

çıkar.

Yani $x = -2 - 4 = -6$ veya $x = -2 + 4 = 2$ çıkar. Aslında çarpanlara ayırma yönteminin bu problem için daha kullanışlı olduğunu siz de kabul edersiniz.

KOYU MATEMATİK

İkinci dereceden denklemler için bir başka yöntem ise *Tam Kareye Tamamlama Yöntemi*'dir. $x^2 + 4x = 12$ denklemi için denklemin her iki tarafına 4 eklersek

$$x^2 + 4x + 4 = 16$$

denklemini elde ederiz. Denklemin her iki tarafına 4 eklememizin bir nedeni var. Bu sayede denklemin sol tarafı $(x + 2)(x + 2)$ şeklinde yazılabilir. Bu sayede problemimiz

$$(x + 2)^2 = 16$$

şekline gelir. Bir başka deyişle $(x + 2)^2 = 4^2$ olur. Buradan da

$x + 2 = 4$ ya da $x + 2 = -4$ eşitliklerine yani $x = 2$ ya da $x = -6$ eşitliklerine ulaşırız.

Fakat

$$x^2 + 9x + 13 = 0$$

denklemi için elimizdeki en güçlü silah ikinci dereceden denklem formülüdür. Bu denklemde $a = 1$, $b = -9$ ve $c = 13$ olur. Buradan da formülümüz sayesinde

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 52}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{29}}{2}$$

çözümüne ulaşırız. Bu çözüm hemen bir bakışta bulabileceğimiz çözümlerden değildir. Matematikte ezberlemeniz gereken çok az formül vardır. İkinci dereceden denklem formülü o formüllerden biridir. Biraz alıştırmayla bir süre sonra bu formülü alfabeyi saymak gibi kolay gelecek.

KOYU MATEMATİK

Peki, neden ikinci dereceden denklem formülü doğrudur?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklinde olan denklemimizi

$$ax^2 + bx = -c$$

şekline getirelim. Daha sonra eşitliğin her iki tarafını a (a, 0'a eşit değildir) ya bölelim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

ve

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

olduğundan tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak denklemin her iki tarafına $\frac{b^2}{4a^2}$ ekleyebiliriz:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Her iki tarafın karekökünü aldığımızda

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

buluruz. Buradan tam da istediğimiz gibi

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

çıkar.

Grafikler Yardımıyla Cebirin Görselleştirilmesi

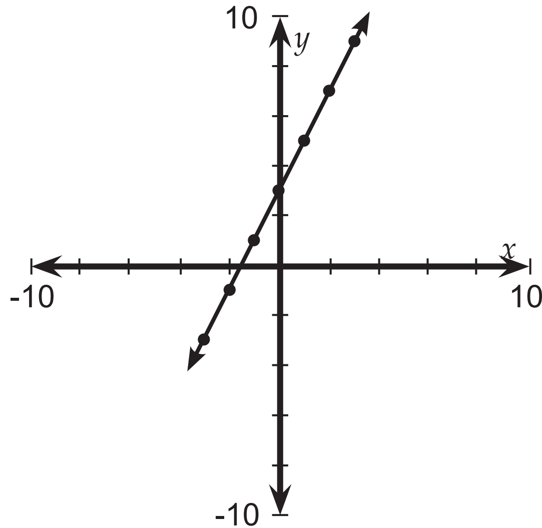
On yedinci yüzyılda Pierre de Fermat ve Rene Descartes'in birbirlerinden bağımsız bir şekilde, cebirsel denklemlerin nasıl görselleştirildiği ve geometrik objelerin nasıl cebirsel olarak yazılabileceğini keşfedince matematikte çok büyük gelişmeler oldu.

Basit bir denklemin grafiğiyle başlayalım.

$$y = 2x + 3$$

Bu denklem, x değişkeninin her bir değerinin iki katını alıp 3 ekleyerek y değişkenin değerlerine ulaşabileceğimizi söyler. Aşağıda x, y çiftlerinin kullanışlı birkaç değerini gösteren tabloyu bulabilirsiniz. Grafiği çizildiğinde noktalar *sıralı ikililer* olarak görülebilir. Örneğin, (- 3, - 3), (- 2, - 1), (- 1, 1) vb sıralı ikililer denklemin noktalarından bazılarıdır. Noktaları birleştirdiğinizde ve geriye kalan kısımları tahmin ettiğinizde ortaya çıkan cisme denklemin *grafiği* denir. Aşağıda $y = 2x + 3$ denkleminin grafiğini görebilirsiniz.

x	y
- 3	- 3
- 3	- 1
- 2	- 1
- 1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

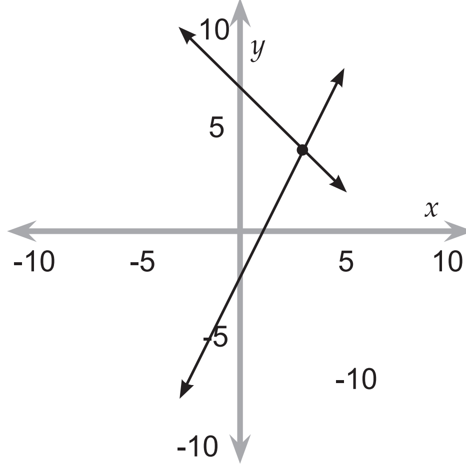


$y = 2x + 3$'ün grafiği

Size işinize yarayabilecek terminolojiden biraz bahsetmek istiyorum. Resmimizdeki yatay doğruya *x-ekseni*, dikey doğruya *y-ekseni* denir. Bu örnekteki doğrunun *eğimi 2*'dir ve y eksenini 3 noktasında *kesmektedir.* Eğim doğrunun dikliğini gösterir. Doğrunun eğiminin 2 olması x'teki 1 birimlik artışın y'deki 2 birimlik artışa karşılık geldiğini anlatır. (Bu durumu tablodan da görebilirsiniz.) Doğrunun y eksenini *kesmesi* ise $x = 0$ olduğunda y değerini gösterir. Geometrik olarak bu nokta doğrunun y ekseniyle kesiştiği noktadır. Genel olarak,

$$y = mx + b$$

denklemin grafiğinde, m doğrunun eğimini, b ise doğrunun y ekseniyle kesiştiği yeri gösterir (Bunun tersi de doğrudur.) Genellikle bir doğruyu o doğrunun denklemiyle tanımlarız. Bu yüzden yukarıdaki grafiğin denklemi $y = 2x + 3$'tür deriz. $y = 2x - 2$ ve $y = -x + 7$ denklemlerinin grafiklerini aşağıda görebilirsiniz.



$y = 2x – 2$ ve $y = - x + 7$ grafikleri nerede kesişir?

$y = 2x - 2$ doğrusunun eğimi 2'dir ve y eksenini 2 noktasında keser (Grafik $y = 2x + 3$ doğrusuna *paralel*dir. $2x + 3$ doğrusunun dikey olarak 5 birim aşağıya kaydırılmış halidir) $y = -x + 7$ doğrusunun eğimi – 1'dir. Yani x değerlerindeki 1 birimlik artışta y değerlerinde 1 birimlik azalış olur. İki doğrunun kesiştikleri (x, y) noktasını bulmak için cebir kullanalım. İki doğrunun kesiştiği noktada aynı x ve aynı y değerlerine sahip olmak zorundalar. Yani öyle bir x değeri bulmak istiyoruz ki her iki denklemde de y değeri aynı olsun. Başka bir deyişle

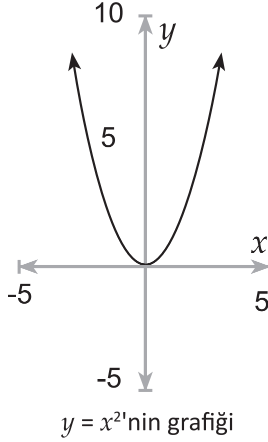
$$2x - 2 = - x + 7$$

denklemini çözmek istiyoruz. Denklemde her iki tarafa x ve 2 eklediğimizde

$$3x = 9$$

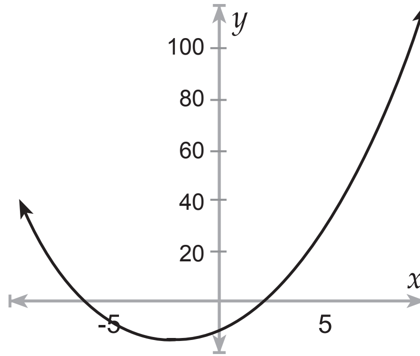
eşitliğine ulaşırız. Buradan da $x = 3$'ü buluruz. x'i bulduktan sonra y'yi bulmak için denklemlerden herhangi birinde x değeri yerine 3 yazarız. $y = 2x - 2$ olduğundan $y = 2(3) – 2 = 4$ olur. ($y = - x + 7$ denklemi de $y = - 3 + 7 = 4$ sonucunu verir). Bu yüzden iki doğrunun kesiştiği nokta (3, 4) noktasıdır.

Doğrunun üstünde olan iki noktayı bildiğimizde doğrunun grafiğini çizmek kolaydır. Bütün doğruyu kolaylıkla çizebilirsiniz. İkinci dereceden denklemlerde (yani x^2'li terimler sahneye çıkınca) ise durum biraz daha karmaşık bir hal alır. En basit ikinci dereceden denklemin grafiği aşağıda göreceğiniz üzere $y = x^2$'nin grafiğidir. İkinci dereceden denklemlerin grafiğine *parabol* denir.



$y = x^2$'nin grafiği

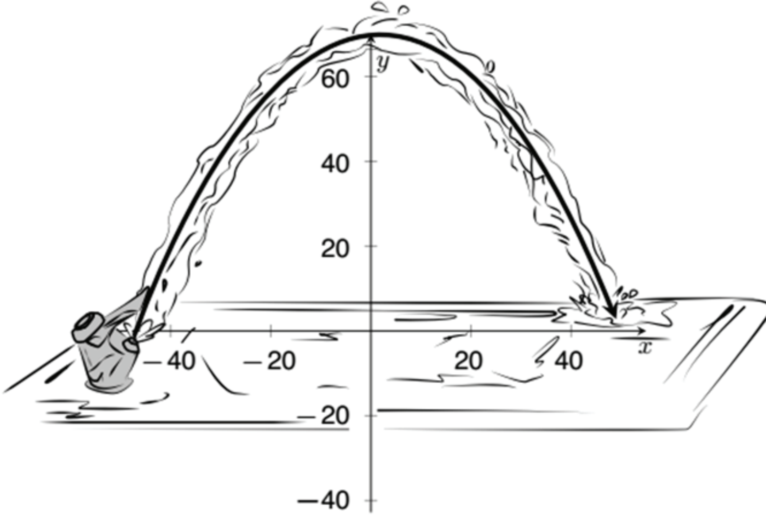
$y = x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$ fonksiyonunun grafiği ise aşağıdaki gibidir.



$y = x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$ fonksiyonunun grafiği. y ekseni yeniden ölçeklendirilmiştir.

$x = -6$ veya $x = 2$ iken $y = 0$ olduğuna dikkat edin. Parabol x eksenini iki noktada kestiği için bu durumu grafikte de gözlemleyebiliriz. Şans eseri diyemeyeceğimiz bir şekilde parabolün en düşük noktası bu iki noktanın tam ortasında yani $x = -2$ noktasında olur. Paraboldeki $(-2, -16)$ noktasına *Tepe Noktası* denir.

Parabollerle günlük hayatımızda sıkça karşılaşırız. Herhangi bir zamanda bir cisim havaya fırlatıldığında cismin yarattığı eğri neredeyse tam bir parabol yaratır. Bu cisim beyzbol topu da olabilir ya da tıpkı aşağıdaki resimde göreceğiniz gibi musluktan fışkıran su da olabilir. Parabollerin özellikleri farlarda, teleskoplarda ve uydu anteninde kullanılmaktadır.



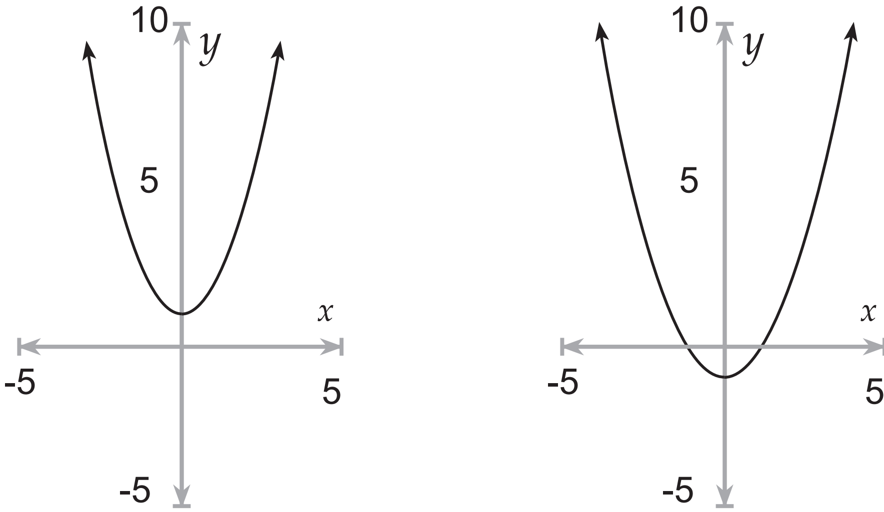
Tipik bir musluk. Bu musluktan fışkıran su $y = - 0.3x^2 + 0.08x + 70$ parabolüyle eşleşir.

Biraz terminoloji öğrenme vakti geldi. Şu ana kadar sayıların ve tek bir değişkenin (x değişkeni) ve bu değişkenin pozitif tam sayı kuvvetlerinin kombinasyonu olan *polinom*larla çalışıyorduk. Polinomdaki en büyük kuvveti olan değişkenin kuvvetine polinomun *derecesi* denir. Örneğin, $3x + 7$ polinomunun derecesi 1'dir (doğrusal polinom). İkinci dereceden bir polinom $x^2 + 4x - 12$ şeklindedir ve bunlara *kuadratik* denir. Üçüncü dereceden polinomlar $5x^3 - 4x^2 - \sqrt{2}$ şeklinde olur ve bunlara *kübik* polinom denir. 4. ve 5. dereceden polinomlara sırayla *kuartik* ve *kuintik* denir. (Daha büyük dereceli polinomların özel adları nelerdir bilmiyorum çünkü bu tür polinomlar karşımıza nadiren çıkarlar. Pratikte yedinci dereceden polinomlara septik denip denmediğini merak ediyorum ama bu konuda çok şüpheliyim.) Hiç değişkeni olmayan polinoma, 17 polinomu gibi, 0. dereceden polinom denir. Bu tür polinomlara *sabit polinomlar* denir. Son olarak polinomlar tanım gereği sonsuz tane terim barındıramazlar. Örneğin

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ bir polinom değildir. (Buna *sonsuz toplam* denir. Bu toplamlardan 12. Bölüm'de bahsedeceğiz.)

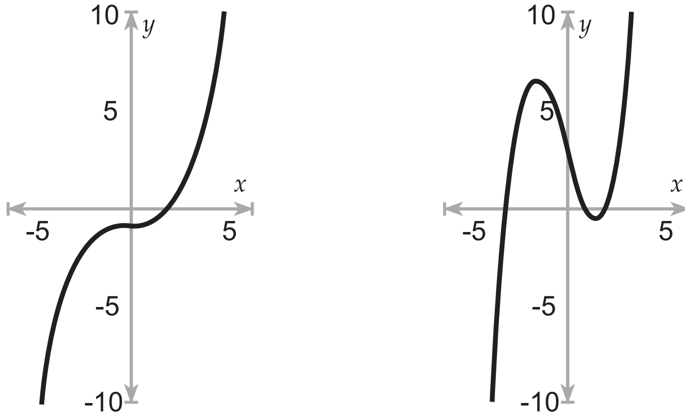
Polinomlarda değişkenlerin kuvvetlerinin pozitif tam sayı olması gerektiğini hatırlatmakta fayda var. Yani kuvvetler kesir veya negatif olamazlar. Örneğin denklemimiz $y = 1/x$ ya da $y = \sqrt{x}$ şeklinde terimler içeriyorsa denklemimiz polinom olamaz çünkü daha sonra göreceğimiz üzere $1/x = x^{-1}$ ve $\sqrt{x} = x^{1/2}$ olarak yazılır.

Polinomun sonucunu 0 yapan x değerlerine polinomun *kökleri* denir. Örneğin, $3x + 7$'nin tek bir kökü vardır o da $x = - 7/3$'tür. $x^2 + 4x - 12$ polinomunun kökleri ise $x = 2$ ve $x = - 6$'dır. $x^2 + 9$ gibi bir polinomun hiç (reel) kökü yoktur. 1. dereceden polinomların (yani doğruların) tam tamına tek bir kökü olduğuna dikkat edin çünkü doğru x eksenini tek bir noktada keser. İkinci dereceden bir polinomun ise en fazla iki kökü vardır. $x^2 + 1$, x^2, $x^2 - 1$ polinomlarının sırayla 0, 1 ve 2 kökü vardır.



$y = x^2 + 1$ ve $y = x^2 - 1$ polinomlarının grafikleri. Polinomların sırasıyla 0 ve 2 kökü vardır. Daha önce gösterilen $y = x^2$ polinomunun tek bir kökü vardır.

Bir sonraki sayfada size bazı kübik polinomların grafiklerini göreceğiz. Grafiklere bakarak kübik polinomların en fazla 3 kökü olduğunu fark edeceksiniz.



$y = (x^3 - 8)/10 = 1/10\ (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ve $y = (x^3 - 7x + 6)/2 = 1/2(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ grafikleri. Bu polinomların sırasıyla 1 ve 3 kökü vardır.

10. Bölüm'de n. dereceden bir polinomun en fazla n tane kökü olduğunu söyleyen *Cebirin Temel Teoremi* ile tanışacağız. Ayrıca polinomlar doğrusal ya da kuadratik şekilde çarpanlarına ayrılabilir. Örneğin,

$$(x^3 - 7x + 6)/2 = \frac{1}{2}\,(x - 1)(x - 2)(x + 3)$$

polinomunun üç kökü vardır (1, 2, ve - 3). Aynı şekilde

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

polinomunun tek bir kökü vardır: $x = 2$. (Bu polinomun 2 *karmaşık* kökü vardır fakat o kısmı 10. Bölüm'de göreceğiz.) Bu arada söylemeden geçemeyeceğim. Günümüzde birçok fonksiyonun grafiğini bulmak çok kolaydır. Yapmanız gereken tek şey en sevdiğiniz arama motoruna denklemi yazmanız ve bakmanız. Mesela "$y = (x^3 - 7x + 6)/2$" gibi bir şey yazarsanız yukarıdakine benzer bir grafik elde edersiniz.

Bu bölümde herhangi bir doğrusal veya kuadratik polinomun köklerini nasıl kolaylıkla bulacağımızı gördük. Tahmin edeceğiniz üzere kübik ve kuartik polinomların köklerini bulmak için de formüller vardır. Fakat oldukça karmaşık formüllerdir. Bu formüller on altıncı yüzyılda bulunmuştur. İki yüzyıldan uzun süredir matematikçiler kuintik (yani beşinci dereceden polinomlar) polinomlar için formül aramışlardır. Bu problemi çözmek için matematikteki en iyi zihinler uğraşmışlardır fakat on dokuzuncu yüzyılın başlarında Norveçli matematikçi Niels Abel, beşinci ve daha yüksek derecelerde polinomların köklerini bulmak için bir formül

olmadığını kanıtlayana kadar hiçbiri başaramamıştır. Bu da bizi sadece matematikçilerin güldüğü bir şakaya götürür: Isaac Newton neden kuintikler için olan teoremi kanıtlayamamıştır? Çünkü Newton, Abel değildir! 6. Bölüm'de imkânsız olan şeyleri kanıtladığımız örnekler göreceğiz.

KOYU MATEMATİK

Neden $x^{-1} = 1/x$'tir? Örneğin, neden $5^{-1} = 1/5$ olmalıdır ki? Aşağıdaki sayı örüntüsüne bakalım:

$$5^3 = 125,\ 5^2 = 25,\ 5^1 = 5,\ 5^0 = ?\ ,\ 5^{-1} = ??\ ,\ 5^{-2} = ???$$

Dikkat ederseniz kuvvet 1 eksildiğinde sonucu 5'e bölüyoruz. Düşününce bu size mantıklı gelecektir. Örüntünün devam etmesi için $5^0 = 1$, $5^{-1} = 1/5$, $5^{-2} = 1/25$ olması gerekir. Fakat *asıl neden* üslü sayıların kuralından gelir: $x^a x^b = x^{a+b}$. Bu kural a ve b pozitifken oldukça mantıklıdır. Örneğin $x^2 = x\ .\ x$ ve $x^3 = x\ .\ x\ .\ x$. Bu yüzden

$$x^2\ .\ x^3 = (x\ .\ x)\ .\ (x\ .\ x\ .\ x) = x^5.$$

Bu kuralın 0 için de geçerli olmasını istediğimizden

$$x^{a+0} = x^a\ .\ x^0$$

olmalıdır. Fakat eşitlikte sol taraf x^a'ya eşit olduğundan sağ tarafın da x^a'ya eşit olması gerekir. O zaman x^0, 1'e eşit olmalıdır.

Üslü sayıların kurallarının negatif sayılar için de geçerli olmasını istediğimizden

$$x^1\ .\ x^{-1} = x^{1+(-1)} = x^0 = 1$$

olduğunu kabul etmemiz gerekir. Eşitlikte her iki tarafı x'e böldüğümüzde x^{-1}'in $1/x$'e eşit olması gerektiği çıkar. Aynı sebepten, $x^{-2} = 1/x^2$, $x^{-3} = 1/x^3$, … olur.

Üslü sayıların kurallarının bütün reel sayılarda geçerli olmasını istediğimizden

$$x^{1/2}\ .\ x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$$

çıkar. Yani $x^{1/2}$ yi kendisiyle çarpınca x'i buluruz. Bu sebepten (x pozitifken) $x^{1/2} = \sqrt{x}$ olur.

y'yi Bulmaya Çalışmak (x'i de Bulmaya Çalışmak!)

Bu bölümü başladığımız gibi cebire dayalı bir sihir numarasıyla bitirelim.

1. Adım: 1'den 10'a kadar iki farklı sayı tutun.
2. Adım: Bu sayıları toplayın.
3. Adım: Çıkan sayıyı 10 ile çarpın.
4. Adım: Çıkan sayıyı büyük sayı ile toplayın.
5. Adım: Çıkan sayıdan küçük sayıyı çıkarın.
6. Adım: Çıkan sonucu bana söyleyin. Ben de size tuttuğunuz ilk 2 sayıyı söyleyeyim!

İster inanın ister inanmayın bu kadarcık bilgiyle ilk tuttuğunuz sayıyı hemen bulabilirsiniz. Örneğin son çıkan sayı 126 ise oyuna 3 ve 9 sayılarıyla başlamışsınız demektir. Bu numarayı birden fazla kez oynasanız bile izleyicilerin numaranızı nasıl yaptığınızı anlaması zordur.

Şimdi size bu numaranın sırrını vereyim. Büyük sayıyı bulmak için son çıkan sayının birler basamağını alın (bizim örneğimizde o sayı 6 idi) kalan basamaklarda yazan sayı(lar) ile toplayın (bizim örneğimizde 12 kaldı). Daha sonra bulduğunuz sonucu 2'ye bölün. $(12 + 6)/2 = 18/2 = 9$. Küçük sayıyı bulmak için bulduğunuz büyük sayıyı alın ve bulduğunuz sonuçtan çıkarın. Bizim örneğimizde $9 – 6 = 3$.

Neden bu sır işe yarıyor? Diyelim ki X ve Y gibi iki sayıyla başladınız ve X sayısı Y'den büyük ya da eşit olsun. Yönergeleri takip edip biraz da aşağıdaki tablodaki gibi cebir kullanınca $10(X + Y) + (X − Y)$ sayısına ulaşırız.

1. Adım	X ve Y
2. Adım	$X + Y$
3. Adım	$10(X + Y)$
4. Adım	$10(X + Y) + X$
5. Adım	$10(X + Y) + X – Y$
Büyük Sayı	$((X + Y) + (X − Y))/2 = X$
Küçük Sayı	$X − (X − Y) = Y$

Peki, bu bize nasıl yardımcı olacak? Dikkat ederseniz $10(X + Y)$ sayısı 0 ile biter ve 0'dan önceki sayı ya da sayılar $X + Y$ olmak zorundadır. X ve Y sayıları 1 ile 10 arasında olduğundan ve X, Y'den büyük ya da eşit

olduğundan $X - Y$ tek basamaklı bir sayı (0'dan 9'a kadar bir sayı) olmak zorundadır. Bu yüzden cevabın son basamağı $X - Y$ olmak zorundadır. Örneğin, 9 ve 3 sayılarıyla başlamışsanız $X = 9$ ve $Y = 3$ olur. 5. Adımdan sonraki cevap $X + Y = 9 + 3 = 12$ ile başlamalıdır ve $X - Y = 9 - 3 = 6$ ile bitmelidir. Yani cevap 126 olmalıdır. $X + Y$ ve $X - Y$'yi bildikten sonra bunların ortalaması olan $((X + Y) + (X - Y))/2 = X$'i bulabiliriz. Y için ise $((X + Y) - (X - Y))/2$ hesaplayabiliriz. (Bizim örneğimizde, $(12 - 6)/2 = 6/2 = 3$). Fakat $X - (X - Y) = Y$ olduğundan, ben az önce hesapladığınız büyük sayıyı bulduktan sonra cevapların son basamağından çıkarmayı daha basit buluyorum $(9 - 6 = 3)$.

KOYU MATEMATİK

Eğer kendinizi biraz daha zorlamak isterseniz (ve hesap makinesi kullanmak isteyen seyircileri de biraz daha zorlamak isterseniz), seyircilerden 1'den 100'e kadar iki sayı tutmalarını isteyebilirsiniz. Fakat bu sefer 3. adımda 10 ile çarpmak yerine 100 ile çarpın ve diğer adımlara devam edin. Örneğin, 42 ve 17 sayılarıyla başlamışlarsa, 5. adımın sonunda 5925 sayısına ulaşırlar. Çıkan sonucu son iki basamak ve ilk iki basamak (59 ve 25) olmak üzere iki parçaya ayırın ve bu iki sayının ortalamasını alın. Böylece

$$(59 + 25)/2 = 84/2 = 42$$

sonucu size büyük sayıyı verir.

Küçük sayıyı bulmak için büyük sayıdan 5. adımın sonunda çıkan sayının son iki basamağını çıkarın, bizim örneğimizde 25, buradan da $42 - 25 = 17$ çıkar. Bu yöntemin böyle olmasının nedeni 5. adım dışında neredeyse aynı şekildedir. 5. adımda cevap $100(X + Y) - (X - Y)$ olur. Burada $X - Y$ cevabın son iki basamağıdır.

Size bir örnek daha verelim: Cevabımız 15222 ise (yani $X + Y = 152$ ve $X - Y= 22$ olduğunda) büyük sayı $(152 + 22)/2 = 174/2 = 87$ çıkar. Küçük sayı ise $87 - 22 = 65$ çıkar.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

$\sqrt{9} = 3$

9 Sayısının Sihri

En Sihirli Sayı

Çocukken, 9 sayısı birçok sihirli özelliğe sahip olduğu için hep en sevdiğim sayı olmuştur. Bir örneğini görmek için lütfen aşağıdaki sihirli matematiksel adımları takip edin.

1. 1 ve 10 arasında bir sayı seçin (veya daha büyük bir tam sayı seçin ve isterseniz hesap makinesi kullanın).
2. Tuttuğunuz sayıyı üçle çarpın.
3. Elde ettiğiniz sayıya 6 ekleyin.
4. Şimdi sayıyı tekrar üçle çarpın.
5. Eğer isterseniz, sayının iki katını alın.
6. Elde ettiğiniz sayının rakamlarını toplayın, eğer sonuç tek haneli ise durun.
7. Eğer rakamlar toplamı iki haneli ise, bu sayının da rakamlarını toplayın.
8. Şimdi cevabınıza odaklanın.

İçimden bir ses diyor ki 9 sayısını elde ettiniz. Doğru değil mi? (Eğer değilse işlemlerinizi tekrar bir kontrol edin derim.)

Peki, 9 sayısıyla ilgili bu kadar büyüleyici olan nedir? Bu bölümün geri kalan kısmında bu sayının diğer birçok büyüleyici özelliğini göreceğiz ve hatta 12 ve 3'ün işlevsel olarak aynı olduğunu söylemenin anlamlı olduğu bir dünyayı keşfedeceğiz! 9 sayısının ilk sihirli özelliği bu sayının katlarına bakarak anlaşılabilir:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144, . . .

Tüm bu sayılarda ortak olan nedir peki? Her bir sayının rakamlarını toplarsanız, her seferinde 9 elde ettiğinizi göreceksiniz. Birkaç tanesini kontrol edelim: 18'in rakamları toplamı $1 + 8 = 9$; 27'nin rakamları toplamı $2 + 7 = 9$; 144'ün rakamları toplamı $1 + 4 + 4 = 9$. Bir saniye bekleyin, istisna olan bir durum var: 99'un rakamları toplamı 18 yapıyor, ancak 18 kendisi zaten 9'un katı. O halde, belki de ilkokulda öğrendiğiniz ve bu bölümde daha sonra açıklayacağımız önemli sonuç şudur:

Eğer bir sayı 9'un katı ise, rakamları toplamı da 9'un katıdır ve bunun tersi de doğrudur.

Örneğin, 123456789 sayısının rakamları toplamı 45 (yani 9'un katı), bu sebeple sayının kendisi de 9'un katıdır. Aksine, eğer 314159 sayısını ele alırsak rakamlar toplamı 23'tür (9'un katı değil), yani sayı da 9'un katı değildir.

Daha önceki sihirli numaramızı anlamak için bu kuralı kullanabiliriz, o yüzden hesaplamanın cebir kısmını inceleyelim. İlk önce rastgele bir sayı seçerek başladık, bu sayıya N diyelim. 3'le çarptıktan sonra sayımız $3N$ olur, bir sonraki adımda da $3N + 6$. Tekrar üçle çarptığımızda ise $3\,(3N + 6) = 9N + 18$, yani $9\,(N + 2)$. Eğer sonucu ikiyle çarpmaya karar verirseniz ise $18N + 36 = 9\,(2N + 4)$ elde edersiniz. Her iki durumda da, elde edilen sonuç 9 çarpı bir tam sayı olacaktır, yani her seferinde 9'un katı bir sayı elde edersiniz. Bu sayının rakamları toplamını hesaplarsanız da yine 9'un katı bir sayı elde etmek zorundasınız (muhtemelen 9, 18, 27 veya 36) ve bu *sayıların* rakamları toplamı da 9 olmak zorundadır.

Şimdi, daha önceki sihir numarasının yapmayı sevdiğim farklı bir versiyonundan bahsedeceğim. Hesap makinesi olan birinden, gizlice aşağıdaki dört haneli sayılardan birini seçmesini isteyin:

3141 veya 2718 veya 2358 veya 9999

Bu sayılar sırasıyla π'nin ilk dört hanesi (8. Bölüm), *e*'nin ilk dört hanesi (10. Bölüm), ardışık Fibonacci sayıları (5. Bölüm), ve en büyük dört basamaklı sayı. Bu sayılardan birini seçtikten sonra, bu dört haneli sayıyı alıp *herhangi bir* üç haneli sayı ile çarpmasını isteyin. Sonuç altı veya yedi haneli ve ne olduğunu tahmin edemeyeceğiniz bir sayı olacaktır. Sonrasında bu sayının sıfırdan farklı rakamlarından birini aklında yuvarlak içine almasını isteyin (Çünkü zaten sıfır çember şeklinde!). Yuvarlak içine alınmamış rakamları *istedikleri* sırayla söylemelerini ve geri kalan rakama odaklanmalarını isteyin. Biraz konsantre olarak cevabı başarılı bir şekilde bulabilirsiniz.

Peki, buradaki numara ne? Başlamalarını istediğiniz dört sayının da 9'un katları olduğunu fark etmişsinizdir. 9'un katı bir sayıyla başlayıp, sonra bu sayıyı herhangi bir tam sayıyla çarptığımız için cevap hala 9'un katı olacaktır. Yani, rakamları toplamı 9'un bir katına eşit olmalı. Karşınızdaki sayıları söyledikçe, basitçe bu sayıları toplayın. Söylenmeyen rakam ise 9'un katına ulaşmak için eklemeniz gereken rakamdır. Diyelim ki karşınızdaki kişi şu rakamları söyledi 5, 0, 2, 2, 6 ve 1. Bu sayıların toplamı 16'dır ve 16'dan büyük en küçük 9'un katı olan sayı 18 ve 18'e ulaşmak için eklemeniz gereken sayı 2 olduğundan, söylemedikleri rakam 2 olmalıdır. Eğer söylenen rakamlar 1, 1, 2, 3, 5, 8 olsaydı toplamları 20 edecekti ve bu durumda 27'ye ulaşmak için eksik olan rakam 7 olacaktı. Varsayalım ki karşınızdakinin söyledikleri rakamlar toplamı 18 oldu; bu kez hangi rakamı söylemediler? Bu numaranın başında 0'a odaklanmamalarını söylediğimiz için söylemedikleri rakam bu kez 9 olacaktır.

Peki, neden 9'un katı olan sayıların rakamları toplamı da 9'un katı olur? Bir örneğe bakalım. 3456 sayısını 10'un kuvvetleri olarak yazarsak;

$$\begin{aligned} 3456 &= (3 \times 1000) + (4\times 100) + (5\times 10) + 6 \\ &= 3\,(999+1) + 4\,(99+1) + 5\,(9+1) + 6 \\ &= 3\,(999) + 4\,(99) + 5\,(9) + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= (9\text{'un katı}) + 18 \\ &= 9\text{'un bir katı} \end{aligned}$$

Aynı mantıkla, rakamları toplamı 9'un katı olan herhangi bir sayı da 9'un katı olmak zorundadır (ve diğer yandan: 9'un katı herhangi bir sayının rakamları toplamı da 9'un katı olmalıdır).

Dokuzları Atmak

Peki, sayınızın rakamları toplamı 9'un katı *değilse* ne olur? Örneğin, 3457 sayısını düşünelim. Yukarıdaki mantığı takip edersek, rakamları toplamı 19 olan 3457 sayısını 3(999) + 4(99) + 5(9) + 7 + 12, şeklinde yazabiliriz, yani 3457 sayısı 7 + 12 = 19, dokuzun katı olan bir sayıdan 19 fazladır. Ve 19 = 18 + 1 olduğundan, bu bize 3457 sayısının 9'un katından 1 fazla olduğunu söyler. Aynı sonuca 19'un rakamlarını toplayarak da ulaşabiliriz. Sonrasında da 10'un rakamlarını toplarız. Ben bunu şematik olarak şöyle gösteriyorum;

$$3457 \longrightarrow 19 \longrightarrow 10 \longrightarrow 1$$

Bu sayınızın rakamlarını toplama ve bunu tek basamaklı bir sayı elde edene kadar tekrar etme sürecine, her adımda aslında 9'un bir katını çıkarttığımız için, *dokuzları atmak* denir. Bu sürecin sonunda elde edilen tek haneli sayıya da baştaki sayının *sayısal kökü* denir. Örneğin, 3457 sayısının sayısal kökü 1'dir. 3456 sayısının sayısal kökü 9'dur. Önceki çıkarımlarımızı kısaca şu şekilde özetleyebiliriz. Herhangi bir n pozitif sayısı için:

Eğer *n'nin* sayısal kökü 9 ise, *n* sayısı 9'un bir katıdır. Aksi halde, sayısal kök *n* 9'a bölündüğünde kalanı verir.

Veya daha cebirsel şekilde ifade etmek gerekirse, eğer n'nin sayısal kökü r ise, o halde bir x tam sayısı için,

$$n = 9x + r$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu dokuzları atma yöntemi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini kontrol etmek için eğlenceli bir yöntem verebilir. Örneğin, eğer bir toplama işlemi doğru şekilde yapıldıysa, sonucun sayısal kökü ile sayısal kökler toplamı aynı sayıyı vermelidir. Aşağıdaki örneğe bakalım. Toplama işlemini yapın;

$$\begin{array}{rcccc} 91787 & \rightarrow & 32 & \rightarrow & 5 \\ \underline{+\ 42864} & \rightarrow & 24 & \rightarrow & \underline{6} \\ 134651 & & & & 11 \rightarrow \textcircled{2} \\ \downarrow & & & & \\ 20 \rightarrow \textcircled{2} & & & & \end{array}$$

Toplamdaki sayıların sayısal köklerinin 5 ve 6 olduğuna ve toplamları olan 11'in sayısal kökünün 2 olduğuna dikkat edin. Cevap olan 134651 sayısının sayısal kökünün de 2 olması tesadüf değildir. Bu yöntemin genel

olarak işe yaramasının temel sebebi cebirde gizlidir;

$$(9x + r_1) + (9y + r_2) = 9\,(x + y) + (r_1 + r_2)$$

Eğer sayılar uyuşmuyorsa, kesinlikle bir adımda hata yapmışsınız demektir. Önemli not: eğer sayılar *gerçekten* uyuşuyorsa bile, bu cevabınızın doğru olduğunu garantilemez. Ancak bu yöntem hataları yüzde 90 oranında tespit edecektir. Şunu da not etmekte fayda vardır ki yanlışlıkla iki rakamın yerini değiştirdiyseniz, bu hata rakamlar toplamını değiştirmeyeceğinden, bu yöntem hatayı tespit edemeyecektir. Ancak bir rakam hatalıysa, eğer bu hata 0'ı 9'a veya 9'u 0'a dönüştürmediyse, bu yöntem hatayı tespit edecektir. Aynı yöntem birden fazla sayıyı topladığınızda da kullanılabilir. Örneğin, aşağıdaki fiyatlara sahip birçok nesne satın aldınız diyelim;

```
 112.56 → 15 → 6
  96.50 → 20 → 2
  14.95 → 19 → 1
  48.95 → 26 → 8
 108.00 →  9 → 9
  17.52 → 15 → 6
 ------        --
 398.48        32 → (5)
   ↓
   32 → (5)
```

Sonucumuzun rakamlarını toplarsak, toplamın sayısal kökünün 5 olduğunu ve sayısal kökler toplamının 32 olduğunu, bunun da 32'nin sayısal kökü 5 olduğundan cevabımızla örtüşür olduğunu görürüz. Dokuzları atma yöntemi çıkarma işleminde de işe yaramaktadır. Örneğin daha önceki toplama problemindeki sayıları çıkaralım:

```
   91787 → 32 → 5
 - 42864 → 24 → 6
 -------        --
   48923         -1 → (8)
     ↓
     26 → (8)
```

Çıkarma işleminin sonucu olan 48923 sayısının sayısal kökü 8'dir. Toplamdaki sayıların sayısal köklerini çıkardığımızda da cevabın 5 - 6 = -1

olduğunu görürüz. Ancak bu -1 + 9 = 8 olduğundan ve 9'un katlarını eklemek (veya çıkarmak) sayısal kökü değiştirmediğinden bizim cevabımızla uyumludur. Aynı mantıkla, 0 farkı da sayısal kök olarak 9 elde etmekle aynıdır.

Şimdi ise öğrendiklerimizi kullanarak başka bir sihir numarası oluşturalım (kitabın tanıtımında verilen gibi). Aşağıdaki adımları takip edin, isterseniz hesap makinesi de kullanabilirsiniz.

1. Herhangi bir iki haneli veya üç haneli sayı düşünün.
2. Sayının rakamlarını toplayın.
3. Bu sayıyı ilk başta tuttuğunuz sayıdan çıkarın.
4. Yeni elde ettiğiniz sayının rakamlarını toplayın.
5. Eğer bu sayı çift ise, sayıyı 5 ile çarpın.
6. Eğer sayı tek ise, bu sayıyı 10 ile çarpın.
7. Şimdi 15 çıkarın.

Elde ettiğiniz sayı 75 mi?

Örneğin, eğer 47 sayısıyla başlarsanız, önce 4 + 7, sonra ise 47 - 11 = 36 elde edersiniz. Elde ettiğimiz sayı 3 + 6 = 9 tek sayı olduğundan, bu sayının 10 ile çarpımı 90 olur ve son olarak 90 - 15 = 75 buluruz. Diğer taraftan, 831 gibi üç haneli bir sayı ile başlarsanız, şu işlemleri yaparsınız 8 + 3 + 1 = 12; 831 - 12 = 819; 8 + 1 + 9 = 18. 18 çift sayısını elde ettikten sonra, yine yukarıdaki adımları baz alarak 18 × 5 = 90 işlemini yapar ve daha önce olduğu gibi 15 çıkarırsanız sonuç yine 75 olur.

Bu numaranın işe yaramasının sebebini şöyle görebiliriz, eğer baştaki sayının rakamları toplamı T ise, o halde sayı 9'un bir katından T kadar daha fazladır. Orijinal sayıdan T çıkardığımızda, 999'dan küçük 9'un katı bir sayı elde etmeyi garantileriz ve böylece rakamları toplamı 9 veya 18 olur. (Örneğin, 47 sayısı ile başladığımızda, rakamlar toplamı 11'di. 47'den 11 çıkardık ve 36 elde ettik, yani rakamlar toplamı 9 oldu.) Bir sonraki adımdan sonra ise, 90 elde etmek zorunda kalacağız (9 × 10 veya 18 × 5 şeklinde) ve sonrasında da önceki örneklerde gördüğünüz gibi 75 elde ederiz.

Dokuzları atma yöntemi çarpma işleminde de kullanılabilir. Önceki sayıları çarptığımızda neler olacağına bir göz atalım:

$$\begin{array}{rcccc} 91787 & \rightarrow & 32 & \rightarrow & 5 \\ \underline{\times \;\; 42864} & \rightarrow & 24 & \rightarrow & \underline{6} \\ 3934357968 & & & & 30 \rightarrow \textcircled{3} \end{array}$$

$$57 \rightarrow 12 \rightarrow \textcircled{3}$$

Dokuzları atma yönteminin çarpma işleminde de işe yaramasının sebebi ise 2. Bölüm'de gördüğümüz FOIL'dir. Örneğin, yukarıdaki örnekte sağdaki sayısal kökler bize çarptığımız sayıların, herhangi bir x ve y tam sayısı için, $9x + 5$ ve $9y + 6$ formunda olduğunu söylemektedir. Bu sayıları çarptığımızda da;

$$\begin{aligned}(9x + 5)(9y + 6) &= 81xy + 54x + 45y + 30 \\ &= 9(9xy + 6x + 5y) + 30 \\ &= (9'\textit{un bir katı}) + (27 + 3) \\ &= (9'\textit{un bir katı}) + 3\end{aligned}$$

elde edilir.

Geleneksel olarak bölme işlemlerini kontrol etmek için dokuzları atma yöntemi kullanılmıyor olsa da, sayıları 9'la bölmek için kullanılan son derece büyüleyici bir yöntemi size göstermek için can atıyorum. Bu yönteme bazen Vedic yöntemi de denir. Aşağıdaki probleme bakalım,

$$12302 \div 9$$

Problemi şu şekilde yazın

$$9\overline{)12302}$$

Şimdi sayıdaki ilk rakamı üste taşıyın ve son rakamın üstüne de (kalandaki gibi) K harfini yazın.

$$\begin{array}{r} 1 \quad\;\; K \\ 9\overline{)12302} \end{array}$$

Daha sonrasında ise aşağıdaki koyu renkle yazılmış olanları çapraz şekilde toplayacağız. Koyu renkle yazılı olanlar 1 ve 2'dir ve bunları toplayınca 3 elde ederiz, bu sayıyı da yukarıdaki bölüm kısmına yazacağız.

$$\begin{array}{r} \mathbf{1}\,3 \quad K \\ 9\overline{)1\mathbf{2}302} \end{array}$$

Sonrasında 3 + 3 = 6.

$$\begin{array}{r} 1\,\mathbf{3}\,6\;\;K \\ 9\overline{)\,12\mathbf{3}02} \end{array}$$

Sonrasında ise 6 + 0 = 6.

$$\begin{array}{r} 1\,3\,\mathbf{6}\,6\,K \\ 9\overline{)\,123\mathbf{0}2} \end{array}$$

Son olarak da 6 + 2 = 8 bize kalanı verecektir.

$$\begin{array}{rl} 1\,3\,6\,\mathbf{6}\,K & 8 \\ 9\overline{)\,1230\mathbf{2}} & \end{array}$$

İşte cevabı bulduk: 12302 ÷ 9 = 1366 ve kalan da 8. Neredeyse çok kolay göründü! Başka bir problemi daha az detayla yapalım.

31415÷9

Cevap aşağıda!

$$\begin{array}{rl} \mathbf{3\,4\,8\,9\,K} & 14 \\ 9\overline{)\,3\mathbf{1415}} & \end{array}$$

Yukarıdaki 3 ile başlayarak sırasıyla şu hesaplamaları yaparız; 3 + 1 = 4, sonra 4 + 4 = 8, ardından 8 + 1 = 9 ve 9 + 5 = 14. O halde cevap 14 kalanı ile 3489'dur. Ancak 14 = 9 + 5 olduğundan bölüme bir ekleyip 3490'dan 5 kalanını elde ederiz.

Aşağıda ise basit ama etkileyici bir cevabı olan soruya bakın. Doğruluğunu kontrol etmeyi (kalem kâğıtla veya kafanızdan) size bırakıyorum:

111111 ÷ 9 = 12345 *K* 6

Gördük ki kalan 9'dan büyük ise, basitçe bölüme 1 ekledik ve kalandan 9 çıkardık. Aynı şey bu bölme problemini çözerken aradaki basamaklardaki toplamın 9'dan büyük olması durumunda da karşımıza çıkar. Bu durumda sayının üzerine bir "elde var" işareti koyup, 9 çıkarır ve önceki gibi devam ederiz. Örneğin, 4821 ÷ 9 probleminde şöyle başlarız:

4 K
9)4821

Burada 4 ile başlarız, ancak 4 + 8 =12 olduğundan 4'ün üzerine ("elde var" olduğunu göstermek için) küçük 1 yazarız, ardından 12'den 9 çıkarıp bir sonraki boşluğa 3 yazarız. Bir sonraki adıma 3 + 2 = 5 ve 5 + 1 = 6 işlemlerini yapıp, aşağıda gösterildiği gibi kalanı 6 ve cevabı da 535 olarak hesaplamış oluruz.

1
4 3 5 K 6
9)4821

Aşağıda da birçok "elde var" olan bir problem var. 98765 ÷ 9 bölme işlemini deneyin.

1 1 1
9 8 6 3 K 8
9)98765

Yukarıdaki 9'la başlayarak, 9 + 8 = 17, elde var için işareti koyup 9 çıkarın, böylece bölümün ikinci basamağı 8 olur. Sonrasında, 8 + 7 = 15; yine elde var işaretini koyduktan sonra 15 - 9 = 6 sayısını yazarız. Bir sonraki adımdaysa 6 + 6 = 12; yine işareti koyduktan sonra 12 - 9 = 3 yazarız. Son olarak kalan 3 + 5 = 8 olur. Tüm elde olanları da ekledikten sonra cevabımız 8 kalanıyla 10973 olur.

KOYU MATEMATİK

Eğer 9'a bölmenin havalı olduğunu düşünüyorsanız bir de 91'e bölmeye bakın. Herhangi bir iki basamaklı sayıyı anında 91'e bölüp cevabı tüm virgülden sonraki kısmıyla söyleyebilirsiniz. Hem de kaleme, kâğıda gerek duymadan! Örneğin,

$$53 \div 91 = 0.582417...$$

Daha doğrusu tam cevap $0.\overline{582417}$ ve 582417 sayısının üzerindeki çizgi de bu sayıların sonsuza kadar tekrar ettiğini gösterir. Peki, bu sayılar nereden geldi? Baştaki iki basamaklı sayıyı 11 ile çarpmak kadar kolay bir yöntem kullanacağız. Bölüm 1'de öğrendiğimiz gibi, şunu hesaplayalım 53 × 11 = 583. Bu sayıdan 1 çıkardığımızda cevabın ilk yarısını elde etmiş oluruz, yani 0.582. Diğer yarısını ise ilk yarısını 999'dan çıkararak buluruz, yani 999 - 582 = 417. Böylece cevap başta söylediğimiz gibi $0.\overline{582417}$ olur.

Haydi, bir örnek daha yapalım. 78 ÷ 91 İşlemini deneyin. Öncelikle 78 × 11 = 858, yani cevap 857 ile başlıyor. Sonrasında da 999 - 857 = 142, yani sonuç 78 ÷ 91 = $0.\overline{857142}$ olur. Aslında bu sayıyı Birinci Bölüm'de görmüştük, çünkü 78/91 sayısı sadeleşince 6/7 elde ederiz.

Bu yöntem işe yarar çünkü 91 × 11 = 1001. Yani örneğimize bakarsak 53/91 = (53 × 11)/(91 × 11) = 583/1001 şeklinde yazabiliriz. Ve 1/1001 = $0.\overline{000999}$ olduğundan, cevabın tekrar eden kısmını şöyle elde etmiş oluruz 583 × 999 = 583000 - 583 = 582417.

91 = 13 × 7 olduğundan, paydayı tekrar *genişletip* 91 yaparak, verilen sayıyı 13 ile bölmek için güzel bir yöntem bulabiliriz. Örneğin, 1/13 = 7/91, ve 7 × 11 = 077 olduğundan,

$$1/13 = 7/91 = 0.\overline{076923}$$

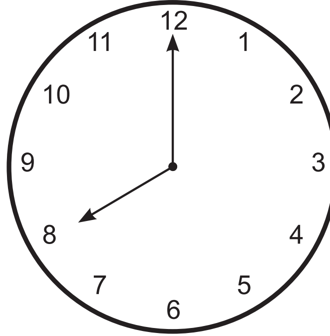
Benzer şekilde, 14 × 11 = 154 olduğundan 2/13 = 14/91 = $0.\overline{153846}$ elde ederiz.

10, 11, 12 ve Modüler Aritmetiğin Sihri

9 sayısıyla ilgili öğrendiğimiz şeylerin çoğu diğer sayılara da uygulanabilir şeylerdir. Dokuzları atma yöntemini uygularken, temel olarak, sayıları 9'a bölümlerinden kalanlarla değiştiriyorduk. Bir sayıyı kalanıyla değiş-

tirme fikri birçok kişi için yeni sayılmaz. Aslında bunu saati söylemeyi öğrendiğimizden bu yana yapıyoruz. Örneğin, eğer bir saat 8'i gösteriyorsa (sabah veya akşam olduğunu belirtmeden), 3 saat sonra kaçı gösterecektir? Peki, 15 saat sonra? Veya 27 saat sonra? Veya 9 saat önce? İlk cevabınız saat 11 veya 23 veya 35 veya -1 olacak olsa da, saate göre bunların hepsi 11'dir. Çünkü tüm bu zamanlar arasındaki fark 12 saatin katları kadardır. Matematikçiler ise aşağıdaki notasyonu kullanmaktadır

$$11 \equiv 23 \equiv 35 \equiv -1 \pmod{12}$$



Peki, 3 saat sonra saat kaçı gösterecek? 15 saat sonra? Veya 27 saat?
Veya 9 saat önce?

Genel olarak, eğer a ve b sayıları arasındaki fark 12'nin bir katı ise o zaman $a \equiv b$ (*mod* 12) yazarız. Aynı şekilde, eğer a ve b sayıları 12'ye bölündüğünde aynı kalanı veriyorsa, yine $a \equiv b$ (*mod* 12) yazarız. Daha genel olarak ise, herhangi iki a ve b sayısı ve herhangi bir pozitif m sayısı için, a ve b sayıları arasındaki fark m'nin bir katı ise, o zaman a ve b sayıları *mod m'e* göre *denk* deriz ve $a \equiv b$ (*mod m*) şeklinde yazarız. Aynı şekilde,

Eğer bir q tam sayısı için $a = b + qm$ ise, $a \equiv b \pmod{m}$

Denklikle ilgili güzel şeylerden biri de neredeyse normal denklemler gibi davranmasıdır ve denklikleri toplayıp, çıkarıp veya çarparak *modüler aritmetik* işlemlerini gerçekleştirebiliriz. Örneğin, eğer $a \equiv b \pmod{m}$ ise, verilen bir c tam sayısı için, aşağıdaki işlemleri yapabiliriz

$$a + c \equiv b + c \quad \text{ve} \quad ac \equiv bc \pmod{m}$$

Farklı denklikler de toplanıp, çıkarılıp, çarpılabilir. Örneğin $a \equiv b$ (mod m) ve $c \equiv d \pmod{m}$ verilmiş olsun, o zaman

$$a + c \equiv b + d \quad \text{ve} \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

Örneğin, $14 \equiv 2$ ve $17 \equiv 5$ (mod 12) olduğundan $14 \times 17 \equiv 2 \times 5$ (mod 12) ve doğruluğunu şöyle görebiliriz; $238 = 10 + (12 \times 19)$. Bu kuralın bir sonucu da denkliklerin kuvvetlerini alabilmemizi sağlar. O halde $a \equiv b$ (mod m) verildiğinde, herhangi bir pozitif n sayısı için **kuvvet kuralını** elde ederiz:

$$a^2 \equiv b^2 \quad a^3 \equiv b^3 \quad \ldots \quad a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

KOYU MATEMATİK

Peki, modüler aritmetik neden çalışıyor? Eğer $a \equiv b$ (mod m) ve $c \equiv d$ (mod m) ise, o zaman herhangi p ve q sayıları için $a = b + pm$ ve $c = d + qm$ eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca FOIL'e göre,

$$ac = (b + pm)(d + qm) = bd + (bq + pd + pqm)\,m$$

Yani ac ve bd farkı m'nin bir katıdır ve böylece ac $\equiv bd$ (mod m). Sonuç olarak $a \equiv b$ (mod m) denkliğini kendisiyle çarpmak ise $a^2 \equiv b^2$ (mod m) denkliğini verir ve bu işlemi tekrar edersek kuvvet kuralını elde ederiz.

10 tabanında çalıştığımızda 9 sayısını bu kadar özel yapan şey ise kuvvet kuralıdır. Aşağıdaki gibi

$$10 \equiv 1 \pmod{9}$$

olduğundan, kuvvet kuralı bize herhangi bir n için $10^n \equiv 1^n \equiv 1$ (mod 9) denkliğini verir, ve böylece 3456 gibi bir sayı aşağıdaki eşitliği sağlar,

$$\begin{aligned} 3456 &= 3(1000) + 4(100) + 5(10) + 6 \\ &\equiv 3(1) + 4(1) + 5(1) + 6 = 3 + 4 + 5 + 6 \pmod{9} \end{aligned}$$

$10 \equiv 1$ (mod 3) olduğundan, bu bir sayının 3'ün katı olup olmadığını (veya 3'e bölündüğünde kalanın ne olduğunu) neden sayının rakamlarını toplayarak bulabileceğimizi açıklar. Eğer farklı bir tabanda çalışıyor olsaydık, örneğin 16 tabanında (*heksadesimal sistem* dediğimiz ve elektrik mühendisliği ve bilgisayar biliminde kullanılan), o zaman $16 \equiv 1$ (mod 15) olduğundan, bir sayının 15'in (veya 3'ün ya da 5'in) katı olup olmadığını veya 15 ile bölümünden kalanı, sayının rakamlarını toplayarak bulabiliriz.

10'luk tabana dönecek olursak, bir sayının 11'in katı olup olmadığını belirlemenin güzel bir yolu vardır. Bu yol ise aşağıdaki ilişkiden gelir

$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

Ve böylece $10^n \equiv (-1)^n$ (mod 11). Yani $10^2 \equiv 1$ (mod 11), $10^3 \equiv -1$ (mod 11) ve bu şekilde devam eder. Örneğin 3456 gibi bir sayı aşağıdaki eşitliği sağlar,

$$3456 = 3(1000) + 4(100) + 5(10) + 6$$

$$\equiv -3 + 4 - 5 + 6 = 2 \pmod{11}$$

Yani 3456 sayısının 11 ile bölümünden kalan 2'dir. Genel kural ise, bir sayı 11'in katıdır sadece ve sadece yukarıdaki gibi sırayla rakamları toplayıp çıkardığımızda sonuçta 11'in katı bir sayı elde ediyorsak (0, ±11, ±22… gibi). Örneğin 31415 sayısı 11'in katı mıdır? 3 - 1 + 4 - 1 + 5 = 10 bize olmadığını söyler, ancak 31416 sayısını düşünseydik, bu kez toplam 11 olacaktı ve 31416 sayısının 11'in bir katı olduğunu görecektik.

Mod 11 aritmetiği aslında USKN (Uluslararası Standard Kitap Numarası: ISBN) oluşturulması ve onaylanmasında kullanılmaktadır. Varsayalım ki kitabınızın 10 haneli USKN'si var (2007'den önce yayınlanmış kitapların birçoğununki gibi). İlk bir kaç rakam kitabın hangi ülkeden olduğunu, yayımcısını, başlığını kodlarken onuncu rakam (kontrol hanesi denilen) bu sayının rakamları özel bir ilişkiyi sağlayacak şekilde seçilir. Eğer bu 10 haneli sayı *a-bcd-efghi-j* gibi görünüyorsa, *j* öyle seçilir ki aşağıdaki ilişkiyi sağlar

$$10a + 9b + 8c + 7d + 6e + 5f + 4g + 3h + 2i + j \equiv 0 \pmod{11}$$

Örneğin benim 2006 yılında yayımlanan *Zihinsel Matematiğin Sırları* isimli kitabımın USKN'si 0-307-33840-1 ve gerçekten de

$$10(0) + 9(3) + 8(0) + 7(7) + 6(3) + 5(3) + 4(8) + 3(4) + 2(0) + 1$$

$$\equiv 154 \equiv 0 \pmod{11}$$

154 = 11 × 14 olduğundan. Kontrol hanesinin 10 olduğu durumda ne olacağını merak ediyor olabilirsiniz. Bu durumda bu sayı yerine, Romen sayılarında 10 olan *X* harfi yazılır. USKN sisteminin güzel bir özelliği de tek bir rakam bile yanlış girilmiş olsa, bunu anında tespit edebilmesidir. Örneğin, eğer soldan üçüncü rakam yanlış girilmiş olsa, toplamda 8'in bir katı kadar hata olacaktır, ±8 veya ±16 veya . . . ±80 gibi. Ancak bu sayıların hiç biri 11'in katı değildir (çünkü 11 asal bir sayı), böylece değiştirilmiş toplam 11'in katı olamaz. Hatta biraz cebir yardımıyla sistemin, iki rakamın yerinin değiştirildiği durumdaki hatayı da tespit edebildiğini görebi-

liriz. Diyelim ki *c* ve *f* rakamlarının yerleri değişmiş ancak diğerleri aynı yerde olsun. Bu durumda toplamı etkileyen, değiştiren katkılar sadece *c* ve *f*'nin olduğu terimlerden gelir. Önceki toplam $8c + 5f$ kullanırken yeni toplamda $8f + 5c$ kullanılır. Aradaki fark ise $(8f + 5c) - (8c + 5f) = 3(f - c)$ olur ve bu da 11'in katı değildir. Yani yeni toplam 11'in katı olmaz.

2007 yılında, yayıncılar USKN-13 sistemine geçtiler. Bu sistemde 13 rakam kullanılır ve mod 11 aritmetiği yerine mod 10 aritmetiği kullanılır. Bu yeni sistemde, *abc-d-efg-hijkl-m* sayısı aşağıdaki ilişkiyi sağladığı sürece geçerlidir

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3j + k + 3l + m \equiv 0 \pmod{10}$$

Örneğin bu kitabın USKN-13 numarası 978-0-465-05472-5. Bu sayıyı kontrol etmenin hızlı bir yolu tek ve çift pozisyondaki ayırıp öyle toplamaktır

$$(9 + 8 + 4 + 5 + 5 + 7 + 5) + 3(7 + 0 + 6 + 4 + 0 + 2)$$
$$= 43 + 3(19) = 43 + 57 = 100 \equiv 0 \pmod{10}$$

USKN-13 sistemi tek rakamda yapılan herhangi bir hatayı tespit eder ve birden fazla (ama tamamı değil) rakamın yer değiştirmesi hatasını da tespit eder. Son verdiğim örnekte eğer son üç rakam 725 değil de 275 alınırsa, yeni toplam da 10'un katı olan 110 olacağından hata tespit edilemez. Barkodları, kredi kartlarını ve banka kartlarını onaylamak için benzer bir mod 10 sistemi kullanılmaktadır. Modüler aritmetik aynı zamanda elektronik devrelerin tasarımı ve internette finansal güvenlikte önemli bir rol oynamaktadır.

Takvim Hesapları

Partilerdeki favori matematik numaram bir kişiye, bana doğum bilgilerini verdiğinde haftanın hangi günü doğduğunu söylemek. Mesela birisi size 2 Mayıs 2002'de doğduğunu söylediyse, anında o kişiye Perşembe günü doğduğunu söyleyebilirsiniz. Daha da kullanışlı olan bir yanı ise bu yıl içerisinde veya önümüzdeki yıl bir tarih verildiğinde, haftanın hangi günü olduğunu bulabilirsiniz. Bu bölümde size bunu yapmak için kolay bir yöntem öğretip arkasında yatan matematiği de anlatacağım.

Bu metodu öğrenmeye başlamadan önce, takvimle ilgili bir kaç tari-

hi ve bilimsel bilgiyi tekrardan gözden geçirmek faydalı olacaktır. Dünya'nın Güneş çevresindeki tam turu yaklaşık olarak 365.25 gün aldığından, tipik olarak bir yılda 365 gün var, her dört yılda bir ekstra bir gün ekleriz, Şubat 29. (Böylece her dört yılda bir doğru hesaba yakın olarak 4 × 365 + 1 = 1461 gün elde ederiz.) Jülyen takviminin arkasındaki bu fikir iki bin yıldan daha eski olup Julius Caesar tarafından ortaya atılmıştır. Örneğin 2000 yılı artık yıldır, sonraki her dört yıl gibi: 2004, 2008, 2012, 2016 ve 2096'ya kadar. Ancak 2100 artık yıl olmayacak, acaba neden?

Problem aslında her yılın 365.243 gün olması (365.25 günden yaklaşık on bir dakika daha az), yani artık yıllar olduğundan biraz daha uzunmuş gibi hesaplanıyor. Güneş etrafında dört yüz turun ardından 146097 gün yaşamış oluruz, ancak Jülyen takvime göre aynı zaman 400 × 365.25 = 146100 gün olarak hesaplanır (üç gün daha fazla). Bu problemden kurtulmak için (ve Paskalya bayramının tarihini belirleme gibi diğer problemleri de çözmek için) 1582 yılında Papa Gregory XIII tarafından Gregoryan (Miladi takvim) takvimi oluşturuldu. Bu yılda, Katolik ülkeler takvimlerinden on gün çıkardılar. Örneğin İspanya'da, Jülyen takvimin 4 Ekim 1582, Perşembe gününden Gregoryan takvimdeki 15 Ekim 1582, Cuma gününe geçildi. Gregoryan takvimle birlikte 100'le bölünebilen yıllar, 400'le de bölünmediği sürece artık yıl olmaktan çıktı (böylece ekstra üç gün çıkarılmış oldu). Bunun sonucu olarak, 1600 yılı artık yıl olarak kalırken, 1700, 1800 ve 1900 yılları artık yıl olmadı. Benzer şekilde 2000 ve 2400 artık yılken, 2100, 2200 ve 2300 yılları artık yıl olmayacak. Bu sistemle birlikte, herhangi bir dört yüz yıllık sürede, toplam artık yıl sayısı 100 - 3 = 97 ve gün sayısı arzulandığı üzere (400 × 365) + 97 = 146097 olur.

Gregoryan takvim tüm ülkelerce aynı zamanda kabul edilmedi, özellikle Katolik olmayan ülkelerde bu süreç daha da yavaş işledi. Örneğin, İngiltere ve kolonileri 1752 yılına kadar yeni takvime geçmedi. Geçiş yaptıklarında da 2 Eylül, Çarşamba gününü 14 Eylül, Perşembe günü takip etti (1700 yılı Jülyen takviminde artık yıl olmasına rağmen Gregoryan takviminde olmadığı için 11 gün çıkarıldığına dikkat edin). Ancak 1920 yılında tüm ülkeler Jülyen takvimden Gregoryan takvime geçti. Bu birçok tarihçi için karışıklığa sebep olmuştur. Benim favori paradoksum ise William Shakespeare ve Miguel de Cervantes'in on gün arayla ölmüş olmasına rağmen aynı tarihte, 23 Nisan 1616'da ölmüş görünmesi. Bunun sebebiyse Cervantes öldüğünde İspanya Gregoryan takvimine geçmişken

İngiltere'nin hala Jülyen takviminde olmasıdır. Yani Cervantes Gregoryen takvimine göre 23 Nisan 1616'da öldüğünde, Shakespeare İngiltere'de hala hayattaydı (sadece on gün daha fazla olsa da) ve tarih 13 Nisan 1616'ydı.

Gregoryen takviminde herhangi bir tarihi haftanın hangi günü olduğunu belirlemek için kullanılan formül ise şöyle:

$$\text{Haftanın Günü} \equiv \text{Ayın Kodu} + \text{Tarih} + \text{Yıl Kodu} \pmod 7$$

Bu terimleri birazdan açıklayacağız. Haftada 7 gün olduğu için formülün modüler aritmetik kullanması ve mod 7'de çalışması mantıklıdır. Örneğin, gelecekte bir tarih bugünden 72 gün sonra ise, haftanın bugünkü günü ne ise, ondan iki gün sonrası olacaktır, çünkü $72 \equiv 2 \pmod 7$. Veya bugünden 28 gün sonrası, 28 sayısı 7'nin katı olduğu için haftanın aynı gününe tekabül eder.

İlk önce hatırlaması kolay olan haftanın günleri kodlarını açıklayarak başlayalım.

Sayı	Gün	İpucu
1	Pazartesi	1-gün
2	Salı	2'ler günü
3	Çarşamba	3 parmak kaldır
4	Perşembe	4'ler günü
5	Cuma	5-gün
6	Cumartesi	6-gün
7	Pazar	7-gün veya hiç-gün

Her gün-sayı eşleşmesi için çoğu açıklamaya ihtiyaç duymayan ipuçları verdim. Çarşamba günü için eğer 3 parmağınızı kaldırırsanız, W harfini oluşturur. Perşembe günü için ipucunu da okursanız, telaffuzunun günün gerçek adına benzeyeceğini göreceksiniz.[1]

1 Burada yazar günlerin İngilizce isimleri, Wednesday ve Thursday ile kendi ipuçları arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır.

KOYU MATEMATİK

Peki, haftanın günlerinin isimleri nereden geliyor? Haftanın günlerini Güneş, Ay, Satürn ve cennetteki en yakın beş varlıkla isimlendirme geleneği antik Babilon zamanına kadar gider. İngilizce'deki gün isimlerine bakarsak Güneş, Ay ve Satürn'ü hemen görebiliriz, Sunday (Pazar veya Güneş günü), Monday (Pazartesi veya Ay günü), Saturday (Cumartesi veya Satürn günü). Diğer isimleriyse Fransızca veya İspanyolca'da görmek daha kolaydır. Örneğin, Mars, Mardi veya Martes olur, Jüpiter Jeudi veya Jeuves, Venus Vendredi veya Miercoles olur. Ayrıca Mars, Jüpiter, Mercury ve Venüs'ün Roma tanrı ve tanrıçaları olduğunu da unutmayalım. İngilizce dilinin Germen kökenleri vardır ve eski Germenler bu günlerin bazılarını İskandinav tanrılarının isimleriyle değiştirmiştir. Böylece Mars Tiw, Mercury Woden, Jüpiter Thor ve Venüs Freya olur. Böylece biz de İngilizce'de haftanın bugün kullandığımız isimlerini elde ederiz, Tuesday (Salı veya Tiw günü), Wednesday (Çarşamba veya Woden günü), Thursday (Perşembe veya Thor günü) ve Friday (Cuma veya Freya günü).

Aşağıda da ipuçlarımla birlikte ay kodlarını veriyorum.

Ay	Kod	İpucu
Ocak*	6	K-I-Ş A-Y-I
Şubat*	2	2. AY
Mart	2	Martılar 2 Ayaklıdır
Nisan	5	N-İ-S-A-N
Mayıs	0	May0nez
Haziran	3	Y-A-Z geldi
Temmuz	5	Çok S-I-C-A-K
Ağustos	1	Ağustos A ile başlar, A=1
Eylül	4	Eylül sondan 4. Ay
Ekim	6	K-İ-M-K-İ-M??
Kasım	2	Sondan 2. Ay
Aralık	4	Yılın S-O-N-U

* İstisna: Artık yıllarda Ocak: 5 ve Şubat: 1

Bu sayıların nasıl elde edildiğini de anlatacağım, fakat öncesinde hesaplamayı nasıl yaptığımızı göstermek istiyorum. Şimdilik, tek bilmeniz gereken yıl kodu 0 olan 2000 yılı. Bu bilgiyi kullanarak o yılda 19 Mart'ın (doğum günüm) hangi gün olduğunu belirlemeye çalışalım. Mart ayının kodu 2 ve 2000 yılının kodu 0 olduğundan, formüle bakarsak 19 Mart 2000 günü,

$$\text{Haftanın günü} = 2 + 19 + 0 \equiv 21 \equiv 0 \pmod 7$$

Yani 19 Mart 2000 günü bir Pazar gününe denk gelir.

KOYU MATEMATİK

Ayların kodlarının nereden geldiğini kısaca şu şekilde açıklayabiliriz. Artık olmayan bir yılda, Şubat ve Mart aylarının kodları aynıdır. Bunun sebebiyse Şubat 28 gün çektiğinde, 1 Mart, 1 Şubat'tan 28 gün sonra gelir. Yani her iki ay da aynı günde başlar. Şimdi öyle ki 1 Mart 2000 Çarşamba gününe denk geliyor. Eğer 2000 yılına 0 kodunu, Pazartesi gününe de 1 kodunu vermek istersek, bunlar Mart ayının kodunu 2 olmak zorunda bırakıyor. Aynı şekilde artık yıl değilse, Şubat ayı da 2 koduna sahip olmak zorundadır. Mart 31 gün olduğundan, 28'den 3 fazla, Nisan takvimi üç gün daha ileridedir, bu sebepten Nisan ayının kodu 2 + 3 = 5 olur. Sonrasında Nisan ayından gelen 28 + 2 günü eklersek, Mayıs ayının kodunun 5 + 2 = 7 ve mod 7 çalıştığımız için, 0 olması gerektiğini görürüz. Bu şekilde devam ederek, tüm ayların kodlarını belirleyebiliriz.

Diğer yandan, artık yıllarda (2000 gibi) Şubat ayı 29 çeker, yani Mart ayının takvimi Şubat'ın takviminden bir gün öndedir. Bu sebeple de artık yıllarda Şubat ayının kodu 2 - 1 = 1 olur. Ocak ayında 31 gün vardır, yani ay kodu Şubat'tan 3 eksik olmalıdır. Artık bir yıl değilken Ocak ayının kodu 2 - 3 = -1 = 6 (mod 7) olurken, artık bir yılda kod 1 - 3 = -2 = 5 (mod 7) olur.

Peki, bir yıldan sonrakine doğum gününüz nasıl değişir? Normalde iki doğum gününüz arasında 365 gün vardır ve bu olduğunda doğum gününüz aslında bir gün değişir, çünkü $365 = 52 \times 7 + 1$ ve sonuç olarak $365 \equiv 1 \pmod 7$. Ancak doğum günleriniz arasında Şubat 29 günü de varsa (Şubat 29'da doğmadığınızı varsayarak), doğum gününüz iki gün değişir. Formülü düşünürsek, yıl koduna artık yıllarda 2, artık olmayan yıllarda 1 ekleriz. Aşağıda 2000 yılından 2031'e kadar yıl kodlarını vereceğiz. Endişelenmeyin. Bunları hatırlamak zorunda kalmayacaksınız!

Yıl	Kod	Yıl	Kod	Yıl	Kod	Yıl	Kod
2000*	0	2008*	3	2016*	6	2024*	2
2001	1	2009	4	2017	0	2025	3
2002	2	2010	5	2018	1	2026	4
2003	3	2011	6	2019	2	2027	5
2004*	5	2012*	1	2020*	4	2028*	0
2005	6	2013	2	2021	5	2029	1
2006	0	2014	3	2022	6	2030	2
2007	1	2015	4	2023	0	2031	3

2000 ile 2031 arasındaki yıl kodları (* işareti artık yılları göstermektedir)

Dikkatinizi çekmek istediğim nokta yıl kodları 0, 1, 2, 3 ile başlayıp sonra 2004 yılında 4 sayısını atlayıp 5 oluyor. Sonrasında 2005 yılının kodu 6, 2006 yılının kodu 7 olur, ancak mod 7 çalıştığımızdan kodu 0 olur. Devam edersek 2007 yılının kodu 1, 2008 yılı (artık yıl) 3 koduna sahip olur. Bu tabloyu kullanarak, 2025 yılında (tam kare olacak sonraki yıl) Pi Günü'nün (14 Mart) hangi güne denk geleceğini hesaplayalım

$$\text{Haftanın Günü} = 2 + 14 + 3 = 19 \equiv 5 \pmod 7 = \text{Cuma}$$

Peki, 1 Ocak 2008 günü? 2008 yılı artık yıl, o yüzden Ocak ayının kodu 6 yerine 5 olacaktır. Sonuç olarak

$$\text{Haftanın Günü} = 5 + 1 + 3 = 9 \equiv 2 \pmod 7 = \text{Salı}$$

Eğer tabloda her sıraya bakarsanız, 8 yılda bir kodun 3 (mod 7) arttığını fark edeceksiniz. Örneğin ilk sıradaki sayılar 0, 3, 6, 2 (2 aslında 9 (mod 7)). Bunun sebebi ise herhangi bir 8 yıllık sürede, takvimde iki kez artık yıl gelir ve tarihler $8 + 2 = 10 \equiv 3 \pmod 7$ kadar değişir.

Hatta daha da iyi haberlerimiz var sizin için. 1901 ve 2099 yılları arasında, takvim her 28 yılda bir tekrar edecektir. Neden? 28 yılda, tam olarak 7 tane artık yıl vardır ve toplamda 28 + 7 = 35 gün kadar değişir. Ancak 35 sayısı 7'nin bir katı olduğu için haftanın günleri aynı kalacaktır. (Eğer bu 28 yıllık periyot 1900 ve 2100 yılları arasında geçerse yukarıdaki ifade doğru olmayacaktır çünkü bu yıllar artık yıllar değiller.) Böylece 28'in katlarını ekleyerek veya çıkararak, 1901 ve 2099 yılları arasındaki herhangi bir yılı 2000 ve 2027 yılları arasına dönüştürebiliriz. Örneğin, 1983 yılı 1983 + 28 = 2011 yılı ile aynı koda sahiptir. 2061 yılı ise 2061 - 56 = 2005 yılıyla aynı koda sahiptir.

Yani hesaplamaları yaparken, herhangi bir yılı bu tablodaki yıllara çevirebilirsiniz ve bu yıl kodları kolay bir şekilde hesaplanabilir. Örneğin, neden 2017 yılının kodu 0'dır? Eğer kodu 0 olan 2000 yılı ile başlarsak, takvim 17 kez değişir ve artık yılları da hesaba katarsak, 4 kez de bu yıllarda değişiklik olacaktır, 2004, 2008, 2012 ve 2016. Yani 2017 yılının kodu 17 + 4 = 21 ≡ 0 (mod 7) olur. Peki, 2020 yılı? Bu kez 5 kez artık yıllardan gelen değişiklik olacaktır (2020 yılını da katarak), yani takvim 20 + 5 = 25 kez değişir. Bu sebeple 2020 yılını kodu 25 ≡ 4 (mod 7) olur. Genel olarak 2000 ve 2027 yıllar arasındaki herhangi bir yılın kodunu şu şekilde belirleyebilirsiniz.

1. adım: Yılın son iki rakamını alın. Örneğin 2022 yılı için son iki rakam 22.
2. adım: Bu sayıyı 4 ile bölün ve kalanı görmezden gelin. (Bu durumda 22 ÷ 4 = 5 ve kalan 2)
3. adım: İlk iki adımda elde edilen sayıları toplayın. Burada 22 + 5 = 27.
4. adım: Bir önceki adımda elde edilen sayıdan 7'nin en büyük katını çıkarın (0, 7, 14, 21 veya 28 olacaktır) ve yıl kodunu elde edersiniz. (Bir diğer deyişle 3. adımda elde edilen sayıyı mod 7'de hesaplayın). 27 - 21 = 6 olduğundan, 2022 yılının kodu 6 olur.

Şuna dikkat edelim ki yukarıdaki adımlar 2000 ve 2099 yılı arasındaki herhangi bir yıl için kodu size verecektir, ancak verilen yılı 2000 ve 2027 arasına çekebilmek için 28'in katlarını çıkarırsanız, sonraki zihinsel hesaplamalar çok daha kolay olacaktır. Örneğin, 2040 yılı ilk önce 2012 yılına indirilir, sonra yukarıdaki adımları takip edersek yılın kodu 12 + 3 - 14 = 1 olur. Aynı zamanda direkt 2040 ile çalışıp, 40 + 10 - 49 = 1, aynı kodu elde edebilirsiniz.

Aynı adımlar 2000'li yıllar dışındaki yıllara da uygulanabilir. Ay kodları değişmeyecektir. Yıl kodları için de küçük bir değişiklik yapmak yeterli olacaktır. 1900 yılı için yıl kodu 1 olur. Doğal olarak, 1900-1999 yılları arasındaki yıl kodları 2000'den 2099'a kadar olan yıl kodlarından 1'er fazla olur. 2040 yılının kodu 1 olduğundan, 1940 yılının kodu 2 olur. 2022 yılının kodu 6 olduğundan, 1922 yılının kodu 7 olur (veya eş değer olarak 0). 1800 yılının kodu 3, 1700 yılının kodu 5, 1600 yılının kodu 0 olur. (Aslında, 400 yılda tam olarak 100 - 3 = 97 artık yıl olduğundan, takvim her 400 yılda bir tekrar eder. Yani bugünden 400 yıl sonra, takvim toplamda 400 + 97 = 497 gün değişir ve 497 sayısı 7'nin katı olduğundan aynı güne tekabül eder.)

4 Temmuz 1776 hangi güne denk geliyordu? 2076'nın kodunu bulmak için, önce 56 çıkarır sonra hesaplarız, 2020 yılı için 20 + 5 - 21 = 4. Yani 1776 yılının kodu 4 + 5 = 9 ≡ 2 (mod 7) olur. Dolayısıyla Gregoryan takvimine göre 4 Temmuz 1776 günü,

Haftanın Günü = 5 + 4 + 2 = 11 ≡ 4 (mod 7) = Perşembe

Belki de imzacılar, Bağımsızlık Bildirgesi'ni, uzun haftasonu tatili gelmeden bir an önce geçirmelilerdi?

KOYU MATEMATİK

Bu bölümü 9 sayısının bir başka sihirli özelliğinden bahsederek sonlandıralım. Rakamları farklı bir sayı alın, rakamları artan şekilde yazılmış olsun. Örneğin 12345, 2358, 369, 135789. Bu sayıyı 9 ile çarpın ve rakamlarını toplayın. Her ne kadar toplamın 9'un katı olacağını tahmin edebilsek de, toplam tam olarak 9 olacaktır. Örneğin,

$$9 \times 12345 = 11105 \qquad 9 \times 2358 = 21222 \qquad 9 \times 369 = 3321$$

Sayı en küçük rakamdan en büyüğüne doğru yazıldıkça ve onlar ile birler basamağındaki rakam aynı olmadıkça, rakamlar tekrar etse bile yukarıdaki doğru olacaktır.

$$9 \times 12223 = 110007 \qquad 9 \times 33344449 = 300100041$$

Peki, bunun arkasındaki sır ne? Şimdi $A \leq B \leq C \leq D \leq E$ koşullarını sağlayan bir ABCDE sayısı verildiğinde ve bu sayı 9'la çarpıldığında ne oluyor bir bakalım. 9 ile çarpmak 10 - 1 ile çarpmakla aynı şey olduğundan, aslında bu aşağıdaki çıkarma problemiyle aynıdır

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ E\ 0 \\ -\quad A\ B\ C\ D\ E \\ \hline \end{array}$$

Eğer çıkartma işlemini soldan sağa doğru yaparsak, $B \geq A$, $C \geq B$, $D \geq C$ ve $E \geq D$ olduğundan yeniden düzenlersek

$$\begin{array}{r} A\ (B - A)\ (C - B)\ (D - C)\ (E - D) \quad 0 \\ - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E \\ \hline A\ (B - A)\ (C - B)\ (D - C)\ (E - D - 1)\ (10 - E) \end{array}$$

ve cevabımızın rakamları toplamı beklendiği üzere

$$A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D - 1) + (10 - E) = 9$$ olur. ☺

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

3! - 2! = 4

Saymanın Sihri

Ünlemli Matematik!

Bu kitaba 1'den 100'e kadar olan sayıları toplayarak başlamıştık. Bu toplamın 5050 olduğunu ve ilk *n* sayının toplamını veren bir formül keşfetmiştik. Şimdi de 1'den 100'e kadar olan sayıların *çarpımıyla* uğraştığımızı varsayalım. Bu sayıları çarparsak oldukça büyük bir sayı elde ederiz. Meraklı okurlar için 158 basamaklı

9332621544394415268169923885626670049071596826438162146
8592963895217599993229915608941463976156518286253697920
827223758251185210916864000000000000000000000000

sayısının bizim aradığımız cevap olduğunu söyleyelim.

Bu bölümde bu gibi sayıların nasıl sayma problemlerinin temelini oluşturduğunu göreceğiz. Bu sayılar bize, bir düzine kitabı kaç farklı şekilde rafa yerleştireceğimizi (yaklaşık yarım milyar farklı şekilde), pokerde elinizde per olma ihtimalini (olası bir durum), sayısal lotoyu tutturma ihtimalinizi (çok düşük bir ihtimal) bulmamızı sağlayacak. 1'den *n*'ye kadar olan sayıların çarpımını *n*! olarak göstereceğiz ve "*n* faktöriyel" diye okuyacağız. Diğer bir deyişle

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

olur. Örneğin,

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Bence buradaki ünlem işareti oldukça yerinde bir işaret çünkü $n!$ sayısı oldukça hızlı büyür ve ileride göreceğimiz üzere bu işaretin oldukça ilginç ve heyecan verici kullanım alanları vardır. Geleneksel olarak matematikçiler $0! = 1$ olarak tanımlarlar, ayrıca $n!$ ifadesinde n her zaman pozitif olmalıdır.

KOYU MATEMATİK

Aslında bu tanımda herkes $0! = 0$ olmasını bekler. Şimdi size neden $0! = 1$ olması gerektiğini göstereceğim. $n \geq 2$ için $n! = n \times (n-1)!$ olması gerektiğini fark edelim. O zaman,

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

olur.

Bu ifadenin $n = 1$ için de doğru olmasını istiyorsak

$$0! = \frac{1!}{1} = 1$$

olması gerekir.

Aşağıda göreceğiniz üzere faktöriyeller şaşırtıcı bir şekilde oldukça hızlı artar:

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 3628800$
$11! = 39916800$
$12! = 479001600$
$13! = 6227020800$
$20! = 2.43 \times 10^{18}$
$52! = 8.07 \times 10^{67}$
$100! = 9.33 \times 10^{157}$

Bu sayıların ne kadar büyük olduğunu kavrayabilmeniz için size Dünya üzerinde yaklaşık olarak 10^{22} tane kum tanesi olduğunu ve evrende yaklaşık olarak 10^{80} tane atom bulunduğunu söyleyebilirim.

52 kartlı bir desteyi kararsanız (bu karma işleminin 52! farklı şekilde olabileceğini ileride göreceğiz) çok büyük olasılıkla o kardığınız sıralamayı bir daha göremeyeceksiniz. Hatta 1 milyon yıl boyunca Dünya üzerindeki bütün insanlar her dakika bu desteyi karsalar büyük olasılıkla yine sizin ulaştığınız sıralamaya ulaşamayacak!

KOYU MATEMATİK

Bu bölümün başında 100! sayısının sonunda bir sürü 0 olduğunu fark etmişsinizdir. Peki bu sıfırlar nereden geliyor? 1'den 100'e kadar olan sayıları çarparken 5'in her bir katı ile 2'nin her bir katını çarptığımızda elimize bir 0 geçer. 1'den 100'e kadar olan sayılarda 5'in katı olan 20 sayı, 2'nin katı olan 50 sayı vardır. İlk başta 100! sayısının sonunda 20 tane 0 olduğunu düşünebilirsiniz. Fakat 25, 50, 75 ve 100 sayılarından gelen 5'in fazla kuvvetleri de vardır. Yani 100! sayısının sonunda 24 tane 0 vardır.

Bölüm 1'de olduğu gibi faktöriyelleri kullanan birçok örüntü vardır. En sevdiklerimden bir tanesini hemen aşağıya yazdım:

$$1.\ 1! = 2! - 1$$
$$1.1! + 2.\ 2! = 5 = 3! - 1$$
$$1.1! + 2.2! + 3.3! = 23 = 4! - 1$$
$$1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! = 5! - 1$$
$$1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! + 5.5! = 6! - 1$$
$$\vdots$$

Bir Faktöriyel Sayıları Örüntüsü

Toplama ve Çarpma Kuralı

Çoğu sayma problemi genellikle iki kurala indirgenebilir: Toplama ve çarpma kuralı. **Toplama Kuralı**, elimizde farklı seçenekler olduğunda bu seçenekleri saymak için kullanılır. Örneğin elimizde 3 kısa kollu ve 5 uzun kollu tişört olsun. O zaman elimizde giymek için 8 farklı tişörtümüz olur. Genel olarak, elimizde 2 farklı türde nesne olduğunda ve ilk tür için a seçeneğimiz, ikinci tür için b seçeneğimiz olduğunda elimizde $a + b$ nesne vardır (burada ilk türdeki nesnelerin ikinci türdekilerle tamamen farklı olduğunu varsayıyoruz).

KOYU MATEMATİK

Toplama kuralı, daha önce de belirtildiği gibi, iki farklı nesnenin ortak hiçbir nesne barındırmadığını varsayar. Fakat *c* nesne her iki türde de varsa bu *c* nesne iki defa sayılır. Bu sebepten farklı nesnelerin sayısı $a + b – c$ olur. Örneğin, 12 kişinin köpeği, 19 kişinin kedi, 7 kişinin ise hem kedisi hem köpeği olsun. O zaman kedi veya köpek sahibi kişilerin sayısı 12 + 19 – 7 = 24 olur. Daha fazla matematiksel örnek için, 1’den 100’e kadar olan sayılar arasında 2’nin katı olan 50 sayı, 3’ün katı olan 33 sayı, 2 ve 3’ün katı (yani 6'nın katı) olan 16 sayı vardır. Bu yüzden 1’den 100’e kadar olan sayılarda 2 veya 3’ün katı olan 50 + 33 – 16 = 67 sayı vardır.

Çarpma Kuralı bir olayın 2 aşaması olduğunda ve ilk aşama için *a* farklı yol, ikinci aşama için *b* farklı yol olduğunda olayın bitirilebilmesi için *a x b* yol olduğunu söyler. Örneğin, 5 farklı pantolon ve 8 farklı tişörtüm varsa ve renk konusunda herhangi bir kısıtlamam yoksa (ki matematikçiler renk konusunu hiç önemsemezler) dışarı çıkmak için 5 × 8 = 40 farklı kıyafetim var demektir. 10 farklı kravatım olduğunu da varsayarsak, 40 × 10 = 400 farklı şekilde kıyafet giyebilirim demektir. Tipik bir iskambil kağıdı destesinde 4 farklı tür vardır: Maça, Kupa, Sinek, Karo. Bu türlerin her birinin üstünde A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q veya K olur. Yani bir iskambil kağıdı destesinde 4 × 13 = 52 kart bulunur. Eğer bu 52 kartı farklı bir şekilde görmek istersek 4 × 13'lük bir dikdörtgen oluşturabiliriz.

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	A ♠	2 ♠	3 ♠	4 ♠	5 ♠	6 ♠	7 ♠	8 ♠	9 ♠	10 ♠	J ♠	Q ♠	K ♠
♥	A ♥	2 ♥	3 ♥	4 ♥	5 ♥	6 ♥	7 ♥	8 ♥	9 ♥	10 ♥	J ♥	Q ♥	K ♥
♦	A ♦	2 ♦	3 ♦	4 ♦	5 ♦	6 ♦	7 ♦	8 ♦	9 ♦	10 ♦	J ♦	Q ♦	K ♦
♣	A ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	5 ♣	6 ♣	7 ♣	8 ♣	9 ♣	10 ♣	J ♣	Q ♣	K ♣

Şimdi zip kodlarını saymak için çarpma kuralını kullanalım. 5 basamaklı olası bütün zip kodları teorik olarak kaç tanedir? Zip kodunun her bir basamağı 0'dan 9'a kadar bir sayı olabilir. Yani en küçük zip kodu 00000 ve en büyük zip kodu 99999 olur. Yani 100.000 farklı seçenek vardır. Bu sonuca çarpma kuralını kullanarak da ulaşabiliriz. Zip kodunun ilk basamağı için 10 farklı seçeneğimiz vardır (0'dan 9'a kadar sayılar). İkinci basamağı için de 10 farklı seçenek vardır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci basamaklar için de 10 farklı seçenek vardır. Yani elimizde $10^5 = 100000$ olası zip kodu vardır.

Zip kodlarını sayarken, rakamların tekrarlanması kısıtlanmamıştır. Şimdi de belli nesneleri bir sıraya koyduğumuz, rakamları tekrarsız duruma bakalım. 2 farklı nesneyi 2 farklı şekilde sıraladığımızı görmek çok kolaydır. Mesela A ve B gibi iki farklı nesnemiz olsa, bunları AB ya da BA şeklinde sıralarız. 3 farklı nesne 6 farklı şekilde sıralanır: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Şimdi 4 farklı nesnenin 24 farklı şekilde sıralanabildiğini yazmadan görebilir misiniz? İlk yazacağımız harf için önümüzde 4 farklı seçenek vardır (A, B, C veya D). Bu harf seçildiğinde ikinci basamak için elimizde 3 farklı seçenek vardır. Bir sonraki basamak için 2 ve son basamak için elimizde tek bir seçenek vardır. Hepsi birlikte önümüzde $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ seçenek vardır. Genel olarak *n farklı nesneyi n! farklı şekilde sıralayabiliriz.*

Bir sonraki örnekte toplama ve çarpma kurallarını beraber kullanacağız. Devletin plakaları 2 farklı şekilde ürettiğini varsayalım. 1. Tipteki plakalarda 3 harften sonra 3 rakam gelsin. 2. Tipteki plakalarda 2 harften sonra 4 rakam gelsin. Olabilecek bütün plakaların sayısı kaçtır? (İngilizce alfabesinde 26 harf vardır ve bütün bu harfleri kullanabilirsiniz. Rakamlar için de 10 rakamın hepsini kullanabilirsiniz. O ve 0 arasındaki karmaşıklığı ise görmezden geliyoruz). Çarpma kuralından 1. Tip plakalar:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17576000$$

kadardır. 2. Tipteki plakalar ise

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6760000$$

kadardır. Plakalar için sadece 2 farklı tip olduğuna göre (İki tipin içinde de bulunan plaka yoktur.) Toplama kuralından 24336000 tane olası plaka yazılabilir.

Sayma problemleriyle (matematikçiler matematiğin bu dalına *kombinatorik* derler) uğraşmanın heyecan verici yönlerinden biri sıklıkla problemin birden fazla çözüm yolunun olmasıdır. (Bu durumun zihinsel aritmetikte de olduğunu gözlemlemiştik.) Son sorduğumuz problemi aslında tek bir hamleyle çözebiliriz. Plaka sayısı

$$26 \times 26 \times 36 \times 10 \times 10 \times 10 = 24336000$$

olur. Çünkü plakaların ilk iki basamağı için 26 farklı seçenek, son 3 basamağı için 10 farklı seçenek vardır. 3. basamak harf ya da rakam olabileceğinden, 26 + 10 = 36 farklı seçim yapılabilir.

Sayısal Lotolar ve Poker Elleri

Bu bölümde lotoyu kazanma şansımızı ya da pokerde elimizdeki ele göre oyunu kazanma şansımızı az önce öğrendiğimiz sayma yöntemleriyle bulmaya çalışacağız. Fakat önce biraz dondurmayla rahatlayalım. Diyelim ki bir dondurmacının 10 farklı dondurma satıyor. Bir külaha 3 top dondurma koyacaksak bunu kaç farklı şekilde yaparız? Külaha dondurma koyarken dondurmaların sırası (elbette!) önemlidir. Aynı dondurmadan birden fazla alabiliyorsak ve her bir top dondurma için 10 seçeneğimiz varsa $10^3 = 1000$ farklı şekilde külahı oluşturabiliriz. Her top dondurmanın farklı olmasını istiyorsak aşağıdaki resimde gösterildiği gibi 10 x 9 x 8 = 720 farklı şekilde külahı oluştururuz. Şimdi asıl sorumuzu soralım: 3 top dondurmayı sıralamanın önemli olmadığı bir kupaya nasıl koyarız? Sıralamanın önemi yoksa seçeneklerimiz azalacaktır. Aslında sıralamanın önemli olduğu durumların sadece 1/6'sı kadarı bizim problemimizin cevabı olacak. 3 farklı dondurma (mesela çikolatalı, vanilyalı ve naneli dondurma) bir külaha 3! = 6 farklı şekilde sıralanır. Yani külahların sayısı kupaların sayısının 6 katı olur. Sonuç olarak, kupaların sayısı

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

tane olur.

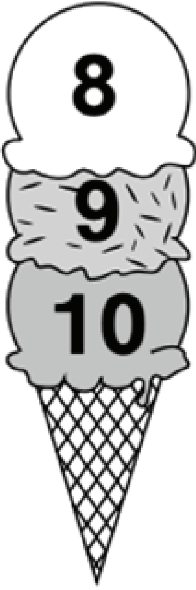
10 × 9 × 8'i yazmanın bir başka yolu ise 10!/7! şeklinde yazmaktır. (Aslında ilk yazımda hesap yapmak daha kolaydır.) Yani kupaların sayısı $\frac{10!}{3!7!}$ olur. Bu ifadeye “10’un 3’lüsü” deriz ve $\binom{10}{3} = 120$ şeklinde gösteririz.

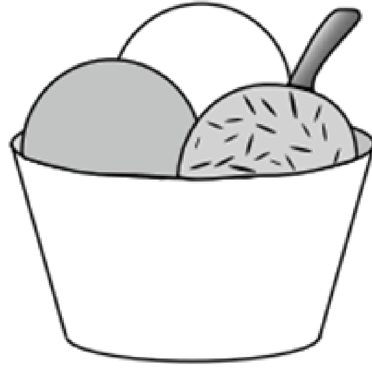
Genel olarak, *n* farklı nesne arasından sıralamanın bir önem taşımadığı *k* farklı nesne seçme işini "*n*'nin *k*'lısı" deriz ve

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

formülünü kullanırız.

Matematikçiler bu tür sayma problemlerine *kombinasyon*, $\binom{n}{k}$ şeklindeki sayılara ise *Binom Katsayıları* diye adlandırırlar. Sıralamanın önemli olduğu sayma problemlerine ise *permütasyon* derler. Bu iki terim sıklıkla karıştırılır. Mesela bir kilidin şifresi için şifrenin kombinasyonları deriz. Fakat aslında şifrenin permütasyonları dememiz gerekir. Çünkü burada şifrenin basamaklarının yerlerinin değişimini anlatmaya çalışırız.





3! = 6 farklı şekilde kupadaki 3 top dondurmayı külaha koyabiliriz.

Dondurmacımızın 20 farklı dondurması varsa ve siz hepsi farklı olmak üzere 5 top dondurma alacaksanız ve dondurmaları aldığınız sıralama da önemli değilse, bunu

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5!} = 15504$$

farklı şekilde yapabilirsiniz. Bu arada eğer hesap makinenizde $\binom{20}{5}$ sa-

yısını hesaplayan bir düğme yoksa herhangi bir arama motoruna girip "20'nin 5'lisi" yazarsanız sonuca muhtemelen ulaşırsınız.

Binom katsayıları bazen sıralamanın önemli göründüğü problemlerde de karşımıza çıkabilir. Mesela bir parayı 10 defa attığımızda kaç farklı sonuç (TYTYYTTYTT ya da TTTTTTTTTT gibi) elde ederiz? Her bir atışta elimizde 2 sonuç olacağından çarpma kuralı bize $2^{10} = 1024$ sonuç olacağını söyler ve her bir sonucun gelme ihtimali eşittir. (Bazı insanlar bu sonucu oldukça şaşırtıcı bulur çünkü hepsinin tura gelme ihtimali onlara daha düşük görünür. Fakat her birinin gelme ihtimali 1/1024'tür.) Öte yandan bir parayı 10 kere attığımızda 4 kere tura gelme ihtimali 10 kere tura gelme ihtimaline göre daha olasıdır. 10 atışta 10 tura gelmesinin tek bir yolu vardır ve bunun da ihtimali 1/1024'tür. Peki 10 atışta 4 kere tura gelmesinin kaç farklı yolu vardır? Bu sonuçların sayısını bulabilmek için 10 atıştan herhangi 4'ünü seçip bu seçtiğimiz 4 atışa tura dememiz gerekir. Diğer atışlar ise yazı olacaktır. 10 atış arasından 4 atış $\binom{10}{4} = 210$ farklı şekilde seçilir. (Tıpkı 10 farklı dondurma arasından 4 farklı top dondurma almak gibi.) Bu yüzden hilesiz bir para 10 kere atıldığında 4 kere tura gelme ihtimali

$$\frac{\binom{10}{4}}{2^{10}} = \frac{210}{1024}$$

çıkar. Bu da yaklaşık olarak yüzde 20'lik bir ihtimaldir.

KOYU MATEMATİK

10 farklı dondurmadan aynı tür dondurmayı almanın serbest olduğu durumda 3 top dondurması olan kaç kupa yapılabilir sorusunu sormak çok doğaldır. (Bu sorunun cevabı $10^3/6$ değildir. $10^3/6$ sayısı tam sayı bile değildir!) Akla ilk gelen çözüm kupalardaki farklı dondurmaların sayısına dayanan üç farklı durumu incelemekten geçer. İçinde tek bir tür dondurma bulunan kupa sayısı 10'dur. Yukarıda da açıkladığımız gibi içinde üç tür dondurma bulunan kupa sayısı $\binom{10}{3}$ = 120'dir. İçinde 2 farklı tür dondurma bulunan kupa sayısı 2 x $\binom{10}{2}$ olur. Çünkü 10 farklı tür arasından 2 tür dondurmayı $\binom{10}{2}$ farklı şekilde seçeriz. Daha sonra seçtiğimiz bu iki farklı türün hangisinin önce geleceğini belirlemek için 2 ile çarparız. Bütün bu değerleri topladığımızda kupa sayısı 10 + 120 + 90 = 220 çıkar.

Bu problemi çözmek için 3 duruma ayırmak dışında başka bir yol daha vardır. Kupaları 3 yıldız ve 9 çizgiyle gösterelim. Mesela, 1,2 ve 2 numaralı dondurmaları seçmişsek

$$* \mid ** \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$$

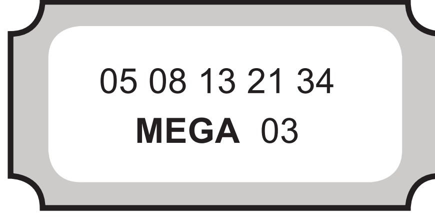
şeklinde gösteririz. 2, 2 ve 7 numaralı dondurmaları seçmişsek

$$\mid ** \mid \mid \mid \mid \mid * \mid \mid \mid$$

şeklinde gösteririz. Yıldız – Çizgi gösterimi

$$\mid \mid * \mid \mid * \mid \mid \mid \mid \mid *$$

şeklinde olan bir dondurma dağılımı ise bize 2, 5 ve 10 numaralı dondurmaları seçtiğimizi söyler. 3 yıldız ve 9 çizginin olduğu gösterimlerde her farklı gösterim bize farklı bir durumu anlatır. Yıldızlar ve çizgiler toplamda 12 tanedir. Bunlardan 3 ünü yıldızlar oluşturur. Bütün yıldız ve çizgiler toplam $\binom{12}{3}$ = 220 tane farklı kombinasyon oluşturur. Bu durumu genelleştirirsek, n nesneden k nesneyi sıralamayı önemsemeden seçmek aslında k tane yıldız ve n – 1 tane çizgiyi sıralamaktır. Bunu da $\binom{n+k}{k-1}$ farklı şekilde yapabiliriz.



Şans oyunlarının çoğunda kombinasyon hesabı vardır. Mesela Kaliforniya'da yapılan sayısal lotoda 1'den 47'ye kadar olan sayılardan 5 tane seçersiniz. Ayrıca 1'den 27'ye kadar olan sayılardan MEGA sayı seçersiniz (Bu sayı seçtiğiniz diğer sayılarla aynı sayı olabilir). MEGA sayısı için önünüzde 27 farklı seçenek vardır. Diğer sayılar için ise $\binom{47}{5}$ seçeneğiniz vardır. Yani olası bütün durumlar

$$27 \text{ x } \binom{47}{5} = 41416353$$

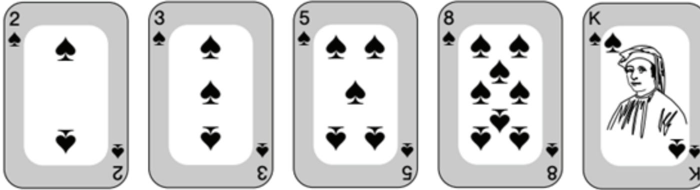
tanedir. Kısacası lotoyu tutturma ihtimaliniz yaklaşık olarak 40 milyonda 1'dir.

Şimdi vites değiştirelim ve poker oyununu inceleyelim. Tipik bir poker elinde 52 kart içinden 5 kart seçilmiştir. Bu 5 kartın sıralamasının hiçbir önemi yoktur. Yani olası bütün poker elleri

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!5!} = 2598960$$

tanedir.

Pokerde, aşağıdaki gibi, elimizde aynı cinsten 5 kart varsa bu duruma *Renk* denir.



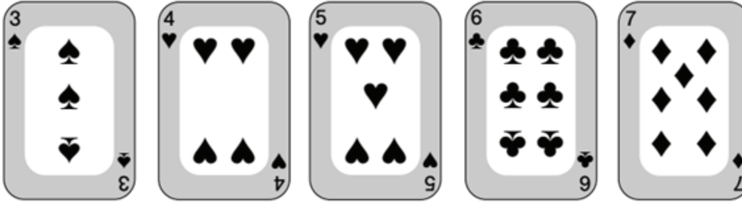
Peki kaç tane renk vardır? Renk yapabilmek için öncelikle ilk kart için 4 cinsten birini seçmeniz gerekir. Diyelim ki seçtiğiniz cins maça olsun. Şimdi o cinsten 5 kartı kaç farklı şekilde seçebilirsiniz? 52 kartlık bir destede 13 tane maça vardır ve bunlardan 5 tanesi farklı $\binom{13}{5}$ şekilde seçilebilir.

Yani renk sayısı

$$4 \times \binom{13}{5} = 5148$$

tanedir. Yani pokerde elinize renk gelme ihtimali 5148/2598960'dur. Bu da yaklaşık olarak 1/500'lük bir ihtimaldir. Poker severler bu 5148 el içinden 4 x 10 = 40 tanesini çıkarıp 5 kartın da sıralı olduğu *Floş* sayısını bulabilirler.

Pokerde 5 kartın ardışık bir şekilde olduğu ele *sıralı* denir. Mesela A2345 veya 23456 ya da … 10JQKA sıralı elleridir.



En düşük karttan başlamak üzere 10 farklı çeşit sıralı vardır. Bunlardan birini bir kere seçtikten sonra (diyelim ki 34567) her bir kart 4'tür karttan birine ait olmak zorundadır. Yani olabilecek tüm sıralı elleri

$$10 \times 4^5 = 10240$$

tanedir. Bu sayı ise renk sayısının neredeyse 2 katıdır. Yani elinizde sıralı olma olasılığı yaklaşık olarak 1/250'dir. Bu yüzden renkler sıralılardan daha güçlüdür. Çünkü elde etmesi çok zordur.

Bu iki elden daha değerli ellerden biri farklı türden 3 aynı kartın ve farklı türden 2 aynı kartın olduğu *Full* elidir. Bu elin tipik bir örneğini aşağıda bulabilirsiniz:



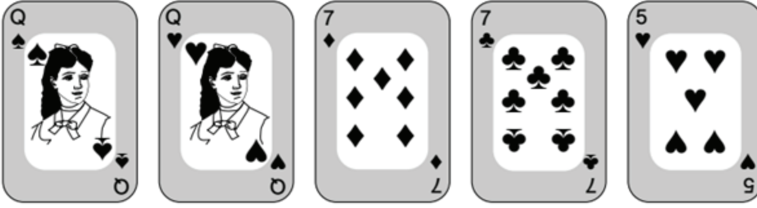
Full yapmak için bir kartın 3 farklı cinsten olmasını sağlamamız gerekir (13 yol). Sonra başka bir kartın 2 farklı cinsten olmasını sağlamamız gerekir (12 yol). (Diyelim ki üç kız ve iki 7 olmasına karar verdik.) Daha sonra cinsleri belirlememiz gerekir. $\binom{4}{3} = 4$ kız üçlüsü arasından hangi

kız üçlüsünü ve $\binom{4}{2} = 6$ ikili arasından hangi 7 ikilisini kullanacağımıza karar verebiliriz. Bütün bunların sonucunda

$$13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$$

tane Full eli vardır. Yani elinizde Full eli olma ihtimali 3744/2598960'tır. Bu oran da yaklaşık olarak 1/700'dür.

Şimdi full ile aynı sayı veya değerden 2 adet ikili kartın olması ile oluşan *Döper* elini karşılaştıralım.



İlk bakışta döper sayısının 13 x 12 tane olduğunu düşünebilirsiniz. Fakat aslında aynı kartları 2 defa sayıyorsunuz. Önce iki tane 7'yi seçip sonra 2 kızı seçmekle önce 2 kızı seçip sonra 2 tane 7'yi seçmek aynı şeydir. Döper sayısını bulmanın doğru başlangıcı $\binom{13}{2}$ sayısını bulmaktan geçer (Diyelim ki 13 kart arasından kızları ve 7'leri beraber seçtik). Sonra geriye kalan 11 karttan 1 kart (5 gibi) seçeriz yani $\binom{11}{1}$. Daha sonra seçtiğimiz bu kartların hangi cinsten olduklarına karar veririz. İlk seçtiğimiz ikili kart için $\binom{4}{2}$ seçeneğimiz vardır. Diğer ikili için de $\binom{4}{2}$ seçeneğimiz vardır. Son olarak seçtiğimiz tek kart için $\binom{4}{1}$ seçeneğimiz vardır. Bütün bunları bir araya yazdığımızda

$$\binom{13}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 123552$$

tane döper olduğunu buluruz. Bu da yaklaşık olarak yüzde 5 ihtimal demektir.

Diğer poker ellerini detaylı bir şekilde incelemeyeceğiz. Sizin için *A*♠*A*♥*A*♦*A*♣8♦ gibi bir kartın 4 cinsinin de bulunduğu *kare* elinin kaç farklı şekilde olabileceğini hesapladım. Sizin de tek başınıza bulmanızı tavsiye ederim:

$$\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{4}\binom{4}{1} = 13 \times 12 \times 1 \times 4 = 624$$

A♠*A*♥*A*♦9♣8♦ gibi aynı kartın 3 farklı cinsini barındıran ellere *üçlü* de-

nir. Üçlülerin sayısı ise

$$\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 54912$$

olur.

A♠*A*♥*J*♦9♣8♦ gibi olan, sadece tek bir per (ikili) içeren eller ise

$$\binom{13}{1}\binom{12}{3}\binom{4}{2}4^3 = 1098240$$

tanedir. Yani gelebilecek bütün ellerin yaklaşık olarak yüzde 42'si perdir.

KOYU MATEMATİK

Hiçbir özel durum içeremeyen ve hiçbir işe yaramayan, bizim çöp dediğimiz eller kaç tanedir? Bütün özel ellerin sayısını bulup olabilecek tüm ellerden çıkarırsanız bu sayıyı bulursunuz fakat ben size daha düz bir cevap vereceğim:

$$\left(\binom{13}{5} - 10\right)(4^5 - 4) = 1302540$$

Önce 13 kart arasından 5 kart seçilir. 34567 gibi sıralı olma ihtimalini ortadan kaldırmak için 10 çıkarılır. Bir sonraki terimde seçtiğimiz 5 kartın her biri için 4 farklı tür olacağı için 4^5 yazılır. Fakat hepsinin aynı cins olma ihtimalini ortadan kaldırmak için 10 çıkarılır. Bütün bunlar yapıldıktan sonra sonuca ulaşılır. Pokerde gelebilecek ellerin yaklaşık olarak yüzde 50.1'i bu tip eldir. Aynı şekilde ellerin yaklaşık olarak yüzde 49.9'unda en az bir per veya daha fazlası vardır.

Şimdi size 3 farklı çözümü olan ve bu çözümlerden 2'sinin doğru olduğu bir soru soralım! En az bir as içeren ve 5 kart içeren kaç el vardır? Akla ilk gelen ve *yanlış* olan çözüm $4 \times \binom{51}{4}$ sayısıdır. Buradaki *yanlış* çıkarım şöyledir: Aslar 4 tanedir. Bunlar arasından 1 tanesini seçerim. Daha sonra geriye kalan 51 karttan (seçtiğim aslar dışındaki diğer aslar bu 51 kart içindedir.) 4 kart seçerim. Buradaki hesapta dikkat ederseniz bazı ellerde birden fazla as bulunmakta. Bazı eller ise birden fazla sayılmakta. Mesela *A*♠*A*♥*J*♦9♣8♦ eli önce *A*♠ ikilisini seçip daha sonra diğer kartları seçtiğimizde ve önce *A*♥ ikilisini seçip daha sonra diğer kartları seçtiğimizde de sayılır. Problemi doğru çözmek için problemi bir eldeki asların sayısına göre 4 farklı durumda inceleyeceğiz. Mesela sadece 1 as içeren ellerin sayısı (önce aslardan birini seçip daha sonra as olmayan kartların arasından 4 kart seçtiğimiz için) $\binom{4}{1}\binom{48}{4}$ çarpımıdır. Bu yöntemle devam edersek daha sonra 2 as olan elleri, 3 as olan elleri ve 4 as olan elleri sayabiliriz. Sonuç olarak en az 1 as içeren eller

$$\binom{4}{1}\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\binom{48}{1}=886656$$

tanedir.

Soruyu tersten sorarak bu sorunun daha kolay bir çözümünü bulabiliriz. İçinde hiç as bulunmayan eller $\binom{48}{5}$ tanedir. Bu yüzden içinde en az bir as bulunan eller

$$\binom{52}{5}-\binom{48}{5}=886656$$

tanedir.

Poker ellerinin nadirliklerine göre sıralandığını daha önce söylemiştik. Mesela tek bir per gelmesi ihtimali döper gelme ihtimaline göre daha fazladır. Bu yüzden döper perden daha değerlidir. En düşükten en yükseğe poker elleri şu şekildedir:

Per

Döper

Üçlü

Kent

Renk

Full

Kare

Floş

Floş Royal

Şimdi jokerle oynadığımızı düşünelim. (Batman'deki Joker'den değil kart olan jokerden bahsediyoruz.) İstediğimiz kart yerine geçebilecek 2 joker kartıyla birlikte 54 kartımız oldu. Mesela elinizde A♥, A♦, K♠, 8♦ ve joker varsa, joker yerine As varmış gibi düşünüp üçlü as yapabilirsiniz. Joker yerine Papaz düşünürseniz elinizde döper olur. Elinizde döperin olması daha kötü bir el olması anlamına gelir.



En güçlü eli elde etmek için Joker yerine hangi kart düşünülmelidir?

Ellerin içine joker girmeye başlayınca işler ilginçleşmeye başlıyor. Ellerin sıralamasında yukarıdaki gibi bir ele sahipseniz jokeri döper yerine üçlü yapmak için kullanırsınız. Fakat bunun sonucunda olabilecek üçlüler sayısı döper sayısını geçer. Bunun sonucunda da döper gelme ihtimali üçlülere göre daha düşük çıkar. Döperi daha değerli kılarsanız da bu sefer jokeri döper yapmak için kullanırsınız böylece döper sayıları artar. 1996 da matematikçi Steve Gadbois çok şaşırtıcı bu konuda çok şaşırtıcı bir sonuca ulaştı: Ellerin gelmesine göre ellerin değer sıralaması yapılmasının herhangi bir tutarlı yolu yoktur.

Pascal Üçgenindeki Örüntüler

Sıkı durun! İşte size Pascal üçgeni:

0. Satır $\binom{0}{0}$

1. Satır $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

2. Satır $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

3. Satır $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

4. Satır $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

5. Satır $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

6. Satır $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

7. Satır $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

8. Satır $\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$

9. satır $\binom{9}{0}$ $\binom{9}{1}$ $\binom{9}{2}$ $\binom{9}{3}$ $\binom{9}{4}$ $\binom{9}{5}$ $\binom{9}{6}$ $\binom{9}{7}$ $\binom{9}{8}$ $\binom{9}{9}$

10. satır $\binom{10}{0}$ $\binom{10}{1}$ $\binom{10}{2}$ $\binom{10}{3}$ $\binom{10}{4}$ $\binom{10}{5}$ $\binom{10}{6}$ $\binom{10}{7}$ $\binom{10}{8}$ $\binom{10}{9}$ $\binom{10}{10}$

Sembollerle Pascal üçgeni

1. Bölüm'de sayıları üçgenlere koyunca oldukça ilginç örüntüler gözlemledik. Bir süredir üzerinde çalıştığımız $\binom{n}{k}$ sayılarını üçgen (bu üçgene *Pascal üçgeni* denir) olarak gözlemleyince de kendilerine özgü güzel örüntüler ortaya çıkar. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ formülünü kullanarak bu sembolleri sayılara çevirelim ve örüntülere bakalım. (Bir sonraki sayfaya bakın.) Bu bölümde bu örüntülerin hemen hemen hepsini açıklayacağız fakat kitabı ilk kez okuyacaklar açıklamaları atlayıp örüntülere bakarak eğlenebilirler.

En üstteki satırda (0. satır) sadece 1 terim vardır, $\binom{0}{0} = 1$. (0! = 1 olduğunu hatırlayın.)

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 = \binom{n}{n}$$

olduğundan her satır 1 ile başlayıp 1 ile bitmek zorundadır.

Şimdi 5. satıra bakalım

5. satır: 1 5 10 10 5 1

Soldan sağa giderken 2. sayının 5 olduğunu fark ettiniz mi? Genel anlamda *n*. satırın 2. sayısı her zaman *n*'dir. Aslında bu kulağa çok mantıklı geliyor çünkü *n* nesneden 1 tanesini $\binom{n}{1} = n$ farklı şekilde seçeriz. Her satırın *simetrik* olduğunu da gözlemleyebiliriz. Yani satırlardaki sayıları soldan sağa da okusak sağdan sola doğru da okusak aynı sayılarla karşılaşırız.

0. Satır	1
1. Satır	1 1
2. Satır	1 2 1
3. Satır	1 3 3 1
4. Satır	1 4 6 4 1
5. Satır	1 5 10 10 5 1
6. Satır	1 6 15 20 15 6 1
7. Satır	1 7 21 35 35 21 7 1
8. Satır	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9. satır	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10. satır	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Sayılarla Pascal Üçgeni

Mesela 5. satırda

$$\binom{5}{0} = 1 = \binom{5}{5}$$

$$\binom{5}{1} = 5 = \binom{5}{4}$$

$$\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}$$

Genel olarak, örüntü bize

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

eşitliğini söyler.

KOYU MATEMATİK

Simetrik ilişki iki şekilde açıklanabilir. Formülden, cebirsel olarak,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

olduğunu gösterebiliriz. Aslında bu eşitliğin doğru olduğunu görmek için formüle gerek yoktur. Mesela neden $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ olsun ki? $\binom{10}{3}$ sayısı 10 dondurma çeşidi arasından 3 tanesini kaç farklı şekilde kupamıza koyacağımızı söyler. Fakat bu sayı 7 çeşit dondurmayı kaç farklı şekilde kupamıza koymayacağımıza eşittir.

Satırların başındaki ve sonundaki 1 sayıları dışında diğer tüm sayıların bir üst satırdaki tam üstünde duran iki sayının toplamı olduğunu fark edebilirsiniz. Bu ilişki o kadar göze çarpar ki bu ilişkiye *Pascal Özdeşliği* denir. Örneğin 9. ve 10. satırlara bakalım.

9. Satır		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10. Satır	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Her sayı kendisinin üstünde duran iki sayının toplamına eşittir.

Peki ama neden böyle olsun ki? 120 = 36 + 84 eşitliğini görünce bunun sayma ile ilgili bir önerme olduğunu anlarız.

$$\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3}$$

Bunun neden doğru olduğunu görebilmek için bir soru soralım: 10 farklı dondurması olan bir dondurmacıdan 3 top dondurmayı kaç farklı şekilde alırız (sıralamanın önemi yok)? İlk cevabımız daha önceden de yaptığımız gibi $\binom{10}{3}$ olur. Fakat bu soruyu cevaplamanın başka bir yolu daha vardır. Diyelim ki dondurma çeşitlerinden biri vanilyalı dondurma. Vanilyalı dondurmayı almazsak kaç farklı seçim yapabiliriz? $\binom{9}{3}$ çünkü geriye kalan 9 farklı çeşitten 3 seçim yaparız. İçinde vanilyalı dondurma olan

kaç farklı seçim yapabilirdik? $\binom{9}{2}$ çünkü ilk önce vanilyalı dondurmayı alırız. Daha sonra ise geriye kalan 9 farklı çeşitten 2 seçim yaparız. Bu sebepten alabileceğimiz olası bütün durumlar $\binom{9}{2} + \binom{9}{3}$ olur. Peki ama hangi cevap doğru? Her iki cevap da mantığımıza uyduğuna göre bu iki cevabın birbirine eşit olması gerekir. Aynı mantıkla, (ya da cebir yoluyla) 0 ve *n* sayıları arasında olan herhangi bir *k* tam sayısı için

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

eşitliği vardır.

Şimdi Pascal Üçgeni'nde her bir satırdaki sayıları topladığımızda aşağıdaki tabloda da görebileceğiniz gibi neler olduğuna bakalım.

Bulduğumuz örüntü bize her bir satırdaki sayıları topladığımızda 2'nin bir kuvvetini verdiğini söylüyor. Genel olarak *n*. satırdaki sayıları topladığımızda 2^n sayısına ulaşıyoruz. Neden böyle çıkıyor? Örüntüyü açıklamak için bir diğer yol ise şöyledir: İlk satırdaki sayıların toplamı 1'dir. Ondan sonraki satırdaki sayıları toplamı 2'dir. Her satırdaki sayıların toplamı bir önce satırdaki sayıların toplamının 2 katıdır. Aslında bu durum az önce kanıtladığımız Pascal Özdeşliği'ni düşündükçe kulağa çok mantıklı geliyor. Örneğin, 5. satırdaki sayıları toplayıp 4. satırdaki sayıların cinsinden yazdığımızda

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbf{1}\\
1 + 1 &= \mathbf{2}\\
1 + 2 + 1 &= \mathbf{4}\\
1 + 3 + 3 + 1 &= \mathbf{8}\\
1 + 4 + 6 + 4 + 1 &= \mathbf{16}\\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 &= \mathbf{32}
\end{aligned}
$$

Pascal üçgeninde satırlardaki sayıların toplamı 2'nin kuvvetlerine eşittir.

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$= 1 + (1 + 4) + (4 + 6) + (6 + 4) + (4 + 1) + 1$$

$$= (1 + 1) + (4 + 4) + (6 + 6) + (4 + 4) + (1 + 1)$$

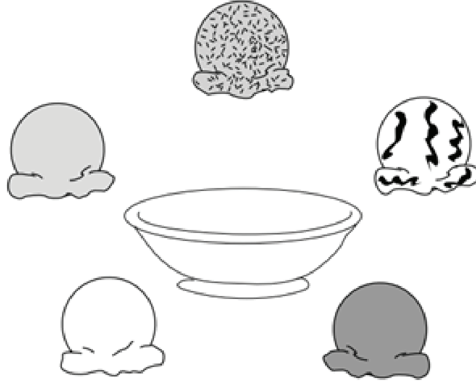
sonucuna ulaşırız. Bu da tam anlamıyla 5. satırdaki sayıların toplamının 4. satırdaki sayıların toplamının 2 katına eşit olduğunu gösterir. Aynı mantıkla ikiye katlama örüntüsü sonsuza kadar gider.

Binom katsayıları cinsinden yazacak olursak, bu özdeşlik bize *n*. satırdaki sayıların toplamının;

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

olduğunu söyler. Bu sonuç oldukça şaşırtıcıdır her bir terim faktöriyel olarak yazılabilir ve bu terimleri bölen bir çok sayı vardır. Fakat bütün toplamın tek bir asal böleni vardır: 2.

Bu örüntüyü başka bir şekilde açıklamak için *sayma* yapabiliriz. Bu tür açıklamalara *kombinatoryel kanıt* denir. 5. satırdaki sayıların toplamını açıklamak için 5 çeşit dondurması olan dondurmacı dükkanına dönelim. (n'inci satırdaki durum 5. satırdaki ile çok benzer olacaktır.) Tekrar aynı çeşidi almadan kaç farklı şekilde dondurma alabiliriz? Elimizdeki kupa 0, 1, 2, 3, 4 veya 5 top dondurma alabilir ve dondurmaları hangi sıra ile aldığımızın bir önemi yoktur. Kaç farklı şekilde 2 top dondurma alabiliriz? Daha önce gördüğümüz gibi bu sorunun cevabı $\binom{5}{2}$ = 10'dur. Bütün durumları bir araya getirecek olursak



Kupamıza kaç farklı şekilde dondurma koyabiliriz?

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

yani 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 farklı şekilde dondurma koyabiliriz. Diğer yandan sorumuzun cevabını çarpma kuralıyla da bulabiliriz. Kupamızda kaç top dondurma olması gerektiğini saymak yerine her bir farklı çeşide bakıp "evet" veya "hayır" cevaplarını verebiliriz. Kupamızda olmasını istediğimiz çeşide "evet" olmasını istemediğimiz çeşide "hayır" cevabını

verebiliriz. Böylece çikolatalı dondurma için 2 seçenek (evet veya hayır), vanilyalı dondurma için 2 seçenek (evet veya hayır) ve diğer çeşitler için de 2 seçenek oluşur. (Dikkat ederseniz eğer tüm çeşitler için hayır cevabını vermişsek kupamızda hiç dondurma olmaz.) Böylece

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

farklı karar verebiliriz. Mantığımız iki farklı yolda da doğru olduğuna göre

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5$$

olur.

KOYU MATEMATİK

Benzer başka bir sayma argümanı n'inci satırdaki çift sayı girdisi olan farklı terimleri topladığımızda (Örneğin 0. Terim, 2. Terim, 4. Terim...) bu toplamın 2^{n-1} olduğunu söyler. Aslında bu durumun 5. satır gibi tek sayılı satırlarda olmasının herhangi şaşırtıcı bir tarafı yoktur. Çünkü topladığımız 1 + 5 + 10 sayılarıyla saymadığımız 1 + 5 + 10 sayıları aynıdır. Bu sayede 2^n'nin yarısını alırız. Bu kural çift sayılı satırlarda da işe yarar. Mesela 4. Satırda $1 + 6 + 1 = 4 + 4 = 2^3$ olur. Genel olarak her $n \geq 1$ satırı için,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n-1}$$

olur. Peki neden böyledir? Eşitliğin sol tarafı n farklı çeşit dondurmadan kaç farklı şekilde çift sayılı top dondurma alabileceğimizi gösterir. Fakat biz aynı kupayı 1 numaralı dondurmadan $n - 1$ numaralı dondurmaya kadar evet- hayır seçeneklerinde bulunarakta yapabiliriz. Her bir çeşit için 2 farklı seçeneğimiz vardır. Sonuncu (n'inci) çeşit ise kupamızdaki top sayısının tek veya çift olmasına göre değişir. Kısacası sonuncu çeşit için tek bir seçenek vardır. Böylece çift sayılı topa sahip dondurma kupalarının sayısı 2^{n-1} olur.

Pascal Üçgeni'ni dik üçgen olarak yazarsak elimizde daha çok örüntü olur. İlk sütun (Sütun 0) bütün 1'leri içerir. İkinci sütun (Sütun 1) bütün pozitif tam sayıları içerir. Sütun 2 ise 1, 3, 6, 10, 15,… olarak tanıdık bir şekilde ilerler. Bu sayılar 1. Bölüm'de gördüğümüz üçgensel sayılardır. Genel olarak Sütun 2'de gördüğümüz sayılar

$$\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2} \ldots.$$

şeklinde ilerler ve *k*. sütun

$$\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \binom{k+3}{k} \ldots$$

şeklinde ilerler.

Şimdi herhangi bir sütunda ilk birkaç terimi topladığınızda neler olduğuna bir bakın. Örneğin 2. sütunda ilk 5 terimi topladığınızda 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35. 35 sayısı ise 15'in hemen alt çaprazında olan sayıdır. Diğer bir deyişle:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$$

Bu eşitlik *hokey çubuğu* özdeşliği dediğimiz özdeşliğe bir örnektir. Pascal Üçgeni'nden doğan ve hokey çubuğuna benzeyen bu ilişki uzun bir sütunun sonundaki sayıdan bir sonraki sütunun bir sonraki satırına atlanmasıyla oluşur. Bu örüntünün neden doğru olduğunu anlamak için size bir örnek verelim. 7 oyunculu bir hokey takımı düşünün. Oyuncuların forma numaraları 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 olsun.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Pascal Dik Üçgeni bize Hokey Çubuğu İlişkisi'ni verir.

Bu 7 oyuncudan 3'ünü kaç farklı şekilde antrenman için çağırabilirim? Sıralama önemli olmadığından, bunu yapmanın $\binom{7}{3}$ farklı yolu vardır. Şimdi aynı soruyu durumlara ayırarak cevaplayalım. Bu üçlülerden kaç

tanesi 7 numaralı oyuncuyu içerir? Bu soruya denk olarak "bu üçlülerden kaç tanesinde en büyük forma numarası 7'dir?" sorusunu da sorabiliriz. 7 numaralı oyuncuyu dahil ettikten sonra $\binom{6}{2}$ farklı seçim yapabiliriz. Daha sonra "bu üçlülerden kaç tanesinde en büyük forma numarası 6'dır?" sorusunu cevaplarız. Bu durumda 7 numaralı oyuncuyu seçemeyiz. 6 numaralı oyuncuyu ise önceden seçeriz. Bu sayede $\binom{5}{2}$ farklı seçim yapabiliriz. Benzer bir şekilde $\binom{4}{2}$ tane üçlüde en büyük forma numarası 5'tir, $\binom{3}{2}$ tane üçlüde en büyük forma numarası 4'tür. $\binom{2}{2}$ tane üçlüde ise en büyük forma numarası 3'tür. En büyük forma numaraları 3, 4, 5, 6 ve 7 olacağından bütün olasılıkları saymış oluruz. Yani 7 kişi arasından bütün 3'lüler $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$ farklı şekilde çağırılabilir. Genel olarak bu argüman

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

eşitliğini gösterir. Şimdi bu formülü muhtemelen her yıl tatillerde aklınıza gelen önemli bir prolemi çözmekte kullanalım. Popüler bir şarkı olan "The Twelve Days of Christmas" ta gerçek aşkınız size 1 hediye verir (keklik). İkinci gün 3 hediyeniz olur (bir keklik ve iki kumru), üçüncü gün altı hediyeniz olur (bir keklik, iki kumru ve üç fransız horozu) ve böyle gider. Peki 12. gün toplamda kaç hediyeniz olur?



12. günün sonunda gerçek aşkım bana kaç tane hediye verir?

Christmas'ın *n*. gününde alacağınız hediye sayısı

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

olur. (Bu eşitlik üçgensel sayılar için kullandığımız çok kullanışlı olan formülümüzden ya da $k = 1$ durumundaki Hokey sopası eşitliğinden gelir.) Yani ilk gün $\binom{2}{2} = 1$ tane hediye alırsınız. İkinci gün $\binom{3}{2} = 3$ tane hediye alırsınız. Böylece 12. gün $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$ tane hediye alırsınız. Hokey sopası eşitliğini kullanarak, toplam hediye sayısı

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{13}{2} = \binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3!} = 364$$

olur.

Şimdi son problemimizin çözümünü "Christmas'ın *n*-inci günü" olarak adlandırdığım neşeli bir şarkıyla kutlayalım:

On the *nth* day of Christmas, my true love gave to me

n novel knick - knacks

n - 1 thing or other

n - 2 et cetera

⋮

5 (plus 10) other things!

Counting all the gifts

Through day *n*,

What's the total sum?

It's precisely $\binom{n+2}{3}$.

Noel'in n-inci gününde gerçek aşkım bana

n tane *n* - 1 tane ondan ya da bundan

n – 2 tane vesaire

⋮

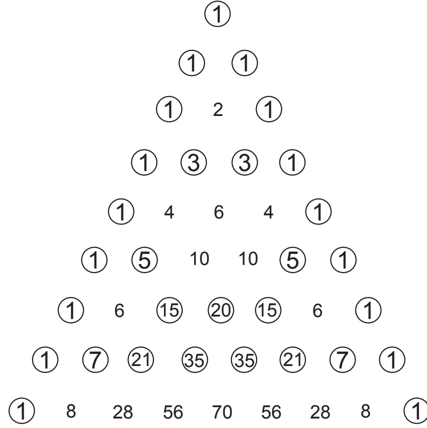
5 (artı 10) diğer şeylerden hediye aldı.

Hediyeleri sayacak olursak,

n-inci günde toplam hediye kaç tanedir?

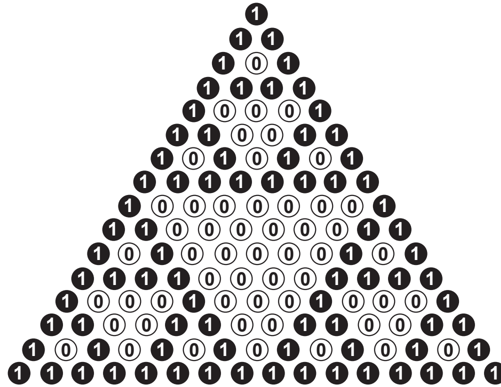
Tam tamına $\binom{n+2}{3}$'tür.

Şimdi size Pascal Üçgeni'ndeki en garip örüntüyü göstereceğim (bir sürü örüntü arasında bunu *tek* geçerim). Aşağıdaki üçgene baktığınızda tek sayıları birer daire içine aldığınızda üçgen içinde üçgenler görürsünüz.



Pascal Üçgeni'ndeki Üçgenler

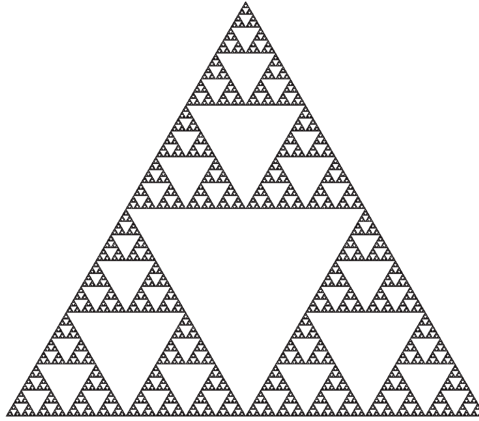
Şimdi bu 16 satırlık üçgeni tek sayılar yerine 1 ve çift sayılar yerine 0 yazarak daha farklı bir şekilde inceleyelim. Dikkat ederseniz her 0 çiftinin altında ve her 1 çiftinin altında mutlaka 0 vardır. Bu sonuç iki tek sayının ve iki çift sayının toplamının çift sayı çıkmasından doğar.



Pascal Üçgeni'ndeki Tek sayılar

Bu üçgeni 256 satırlı bir hale getirdiğimizde ve tek sayıları siyah, çift sayıları beyaz olarak boyadığımızda oluşan durumu aşağıda görebilirsiniz.

Oluşan bu şekil *Sierpinski Üçgeni* olarak bilinen fraktal şeklin yaklaşık bir halidir. Bu sadece Pascal Üçgeni'nde gizlenmiş olan gizli hazinelerden biridir. Şimdi size başka bir sürpriz göstereyim. Pascal Üçgeni'nin her bir satırında kaç tane tek sayı vardır? 1. satırdan 8. satıra bakarsak (0. satırı saymayın) 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2 olduğu görülür. Görünürde hiçbir örüntü yoktur. Fakat sonuç hep 2'nin kuvveti şeklinde çıkar. Aslında 2'nin kuvvetleri burada önemli bir rol oynar. Mesela sadece 2 tek sayı içeren satırlara baktığımızda 1, 2, 4 ve 8. satırlar olduğunu görürüz. Bunlar 2'nin kuvvetleridir. Genel örüntü için *0'dan büyük ya da eşit bütün tam sayılar 2'nin kuvvetleri ile tek bir şekilde yazılır* kuralını kullanacağız.



Pascal ve Sierpinski Buluşması

Mesela:

1 = 1

2= 2

3 = 2 +1

4 = 4

5 = 4 + 1

6 = 4 + 2

7 = 4 + 2 +1

8 = 8

1, 2, 4 ve 8. satırlarda (2'nin kuvvetleri olan satırlarda) 2 tek sayı vardır. 3, 5 ve 6. satırlarda (bu sayılar 2 tane 2'nin kuvvetleri biçiminde yazılabilir) 4 tane tek sayı vardır. 7. satırda (Bu sayı 3 tane 2'nin kuvvetinin toplamı şeklinde yazılabilir) 8 tane tek sayı vardır. Şimdi kuralı açıklayalım. Eğer n sayısı p tane 2'nin farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılabiliyorsa n'inci satırdaki tek sayı sayısı 2^p'dir. Örneğin 83. satırda kaç tane tek sayı vardır? 83 = 64 + 16 + 2 + 1, 4 farklı 2'nin kuvvetinin toplamı şeklinde yazılabildiğinden 83. satırda $2^4 = 16$ tane tek sayı vardır!

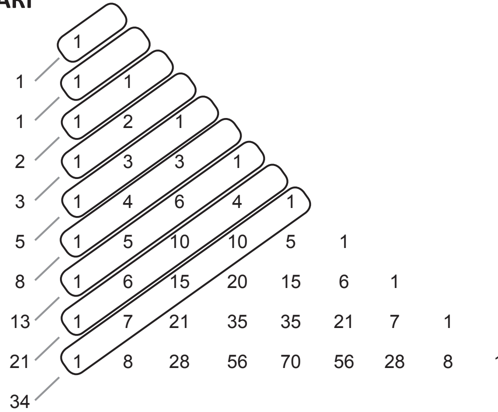
KOYU MATEMATİK

Bunu kanıtlamayacağız ama merak edersiniz belki diye anlatalım:
a, b, c, d sayıları 0 ya da 1 olmak üzere $k = 64a + 16b + 2c + d$ olduğunda $\binom{83}{k}$ sayısı tek sayıdır. Özel olarak k aşağıdaki sayılardan biri olmak zorundadır:

0, 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19, 64, 65, 66, 69, 80, 81, 82, 83

Bölümümüzü son bir örüntü ile bitirelim. Pascal Üçgeni'nin satırlarındaki sayıları topladığımızda (2'nin kuvvetleri olur) ve sütunlarındaki sayıları topladığımızda (Hokey Sopası) neler olduğunu keşfettik. Peki Pascal Üçgeni'nde diagonallerde (köşegenlerde) olan sayıları topladığımızda ne olur?

KÖŞEGEN TOPLAMLARI



Pascal Fibonacci Buluşması

Köşegenlerdeki sayıları topladığımızda yukarıda görüldüğü gibi

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

sayılarına ulaşırız. Bu sayılar ünlü Fibonacci sayılarıdır. Bu sayılar bir sonraki bölümümüzün konusu olacaklar.

BEŞİNCİ BÖLÜM

1, 1, 2, 3, **5**, 8, 13, 21...

Fibonacci Sayılarının Sihri

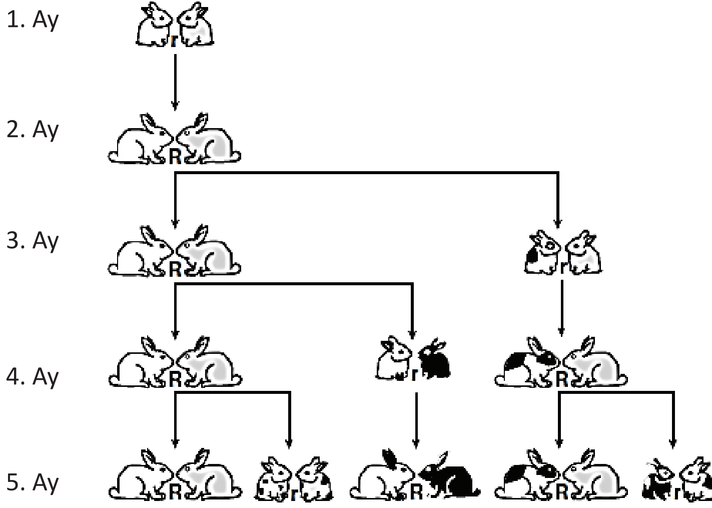
Doğanın Sayıları

İşte en sihirli sayı dizilerinden birisi, Fibonacci sayıları!

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Fibonacci dizisi 1,1 ile başlar. Üçüncü sayı 1 + 1 (önceki iki sayının toplamı), yani 2'dir. Dördüncü sayı 1 + 2 = 3, beşinci sayı 2 + 3 = 5 olur ve bu şekilde birdir bir oyunu gibi büyümeye devam eder: 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21 vs. Bu sayılar 1202'de Leonardo of Pisa'nın (Pisa'lı Leonardo, ki daha sonra takma adı "Fibonacci" olmuştur) *Liber Abaci* adlı kitabında ortaya çıkmışlardır. *Liber Abaci*, tam olarak "Hesaplama Kitabı" anlamına gelen ve Batı dünyasına Hint-Arap rakamlarını ve bugün kullandığımız aritmetik yöntemlerini tanıtan kitaptır.

Kitapta yer alan bir sürü aritmetik problemden bir tanesi ölümsüz tavşanlarla ilgilidir. Yavru tavşanların bir ayda yetişkin olduğunu, her tavşan çiftinin her ay bir çift yavru tavşan doğurduğunu ve bütün bu tavşanların yaşamlarının asla sona ermediğini varsayalım. Soru şu, eğer bir çift yavru tavşanımız varsa on iki ay sonra kaç çift tavşanımız olur?



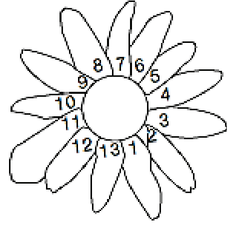
Bu problem resimler veya sembollerle görselleştirilebilir. Biz bir çift yavru tavşanı küçük "r" harfiyle, bir çift yetişkin tavşanı ise büyük "R" harfi ile göstereceğiz. Böylece bir ay geçtiğinde, her küçük "r" büyük "R" ile ve her büyük "R" ise "Rr" ile değiştirilecektir. (Çünkü yavru tavşanlar yetişkin hale geliyor ve yetişkin tavşanların ise bir çift yavrusu oluyor.)

Bu durumu aşağıda verilen tablodaki gibi modelleyebiliriz. Görüleceği üzere ilk altı aydaki tavşan çiftlerinin sayısı sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5 ve 8 olur.

Ay Sayısı	Popülasyon	Tavşan Çiftlerinin Sayısı
1	r	1
2	R	1
3	Rr	2
4	RrR	3
5	RrRRr	5
6	RrRRrRrR	8

Popülasyonun açıkça listesini oluşturmadan önce hadi yedinci ayda 13 tavşan çiftinin olacağını görelim. Yedinci ayda kaç tane yetişkin tavşan çifti hayattadır? Altıncı ayda hayatta olan bütün tavşanlar yedinci ayda yetişkin olacağı için, yedinci ayda 8 çift yetişkin tavşan olacaktır. Yedinci ayda kaç tane yavru tavşan çifti olacaktır? Altıncı ayda kaç tane yetişkin

tavşan çifti varsa o kadar olacaktır, yani 5, ki bu da beşinci aydaki toplam popülasyondur (tesadüf değil). Sonuç olarak yedinci aydaki tavşan çiftlerinin sayısı $8+5=13$ bulunur.





İlk iki Fibonacci sayısını $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ olarak alalım ve bir sonraki Fibonacci sayısını önceki ikisinin toplamı olarak tanımlayalım, yani $n \geq 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

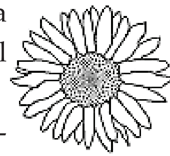
olsun. Buradan $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ olur ve böyle devam ederek aşağıdaki tablodaki sayılar bulunur.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

İlk 13 Fibonacci sayısı

Nihayetinde, Fibonacci'nin "ölmeyen tavşanlar" probleminin cevabı $F_{13} = 233$ tavşan çifti olarak bulunur. (Bu 233 tavşan çiftinin $F_{12} = 144$ tanesi yetişkin, $F_{11} = 89$ tanesi ise yavru tavşan çiftidir.)

Fibonacci sayılarının popülasyon hareketliliği ötesinde de bir sürü uygulaması vardır, ayrıca enteresan biçimde doğada da sıkça ortaya çıkarlar. Örneğin, bir çiçeğin taç yapraklarının sayısı genellikle bir Fibonacci sayısıdır, bunun yanında bir günebakanın, ananasın, çam kozalağının spirallerinin sayıları da bir Fibonacci sayısı olmaya meyillidirler. Ancak bende Fibonacci sayıları konusunda en fazla sevgi uyandıran şey sergiledikleri güzel sayısal özelliklerdir.



Mesela, baştan bir sürü Fibonacci sayısını topladığımızda neler olduğuna bakalım:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 = 2 - 1 \\
1 + 1 &= 2 = 3 - 1 \\
1 + 1 + 2 &= 4 = 5 - 1 \\
1 + 1 + 2 + 3 &= 7 = 8 - 1 \\
1 + 1 + 2 + 3 + 5 &= 12 = 13 - 1 \\
1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 &= 20 = 21 - 1 \\
1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 &= 33 = 34 - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Eşitliklerin sağındaki sayılar tam olarak Fibonacci sayıları değiller ama yakınlar. Aslında her birinin Fibonacci olmaya bir eksiği var. Bu düzenin neden anlamlı olduğunu görelim. Son eşitliği göz önüne alıp her bir Fibonacci sayısını kendisinden sonraki iki Fibonacci sayısının farkı ile değiştirdiğimizde neler olacağına bakalım: Şöyle ki,

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13$$

$$= (2 - \mathbf{1}) + (3 - 2) + (5 - 3) + (8 - 5) + (13 - 8) + (21 - 13) + (\mathbf{34} - 21)$$

$$= \mathbf{34 - 1}$$

Şuna dikkat edelim, $(2-1)$ ifadesindeki 2 ile $(3-2)$ ifadesindeki 2 sadeleşir. Yine $(3-2)$ ifadesindeki 3 ile $(5-3)$ ifadesindeki 3 sadeleşir. Nihayetinde, en büyük terim olan 34 ve baştaki terim olan -1 haricindeki bütün terimler sadeleşir. Buradan yola çıkarak genel olarak, ilk *n* Fibonacci sayısının toplamı için aşağıdaki formülü elde ederiz,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

İşte aynı zariflikte çözümü olan benzer bir soru. Eğer ilk *n*-tane çift indisli Fibonacci sayısını toplarsanız ne elde edersiniz? Yani,

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n}$$

toplamını basitleştirebilir misiniz?

Öncelikle birkaç sayıya bakalım:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 8 = 12$$

$$1 + 3 + 8 + 21 = 33$$

$$\vdots$$

Bir dakika. Bu sayılar bir yerden tanıdık. Aslında bu sayıları önceki toplamlardan biliyoruz. Fibonacci sayılarından birer eksikler. Esasında, her bir Fibonacci sayısının kendinden önceki iki tanesinin toplamı olduğu gerçeğini kullanarak, ilk terimden sonraki her çift indisli Fibonacci sayısını kendisinden önceki iki Fibonacci sayısının toplamı ile değiştirebiliriz. Böylece aynen bir önceki problemimizdeki duruma dönüşür, şöyle

$$
\begin{aligned}
& 1 + 3 + 8 + 21 \\
= {} & 1 + (1 + 2) + (3 + 5) + (8 + 13) \\
= {} & 34 - 1
\end{aligned}
$$

Son satır, ilk yedi Fibonacci sayısının toplamının dokuzuncudan bir küçük olduğu gerçeği kullanılarak elde edilir.

Genel olarak yaparsak, $F_2 = F_1 = 1$ eşitliğini işimize gelen biçimde kullanırsak ve her bir Fibonacci sayısını kendisinden önce gelen iki Fibonacci sayısının toplamı ile değiştirirsek, ilgilendiğimiz toplamın ilk $2n - 1$ Fibonacci sayısının toplamına dönüştüğünü görürüz.

$$
\begin{aligned}
& F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} \\
= {} & F_1 + (F_2 + F_3) + (F_4 + F_5) + \cdots + (F_{2n-2} + F_{2n-1}) \\
= {} & F_{2n+1} - 1
\end{aligned}
$$

Hadi şimdi de ilk n-tane tek indisli Fibonacci sayısını toplarsak ne elde edeceğimize bakalım.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 + 2 &= 3 \\
1 + 2 + 5 &= 8 \\
1 + 2 + 5 + 13 &= 21 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tek bakışta bile anlaşılacak kadar bariz bir uyum var. İlk n-tane tek indisli Fibonacci sayısının toplamı doğrudan bir sonraki Fibonacci sayısını veriyor. Bir önceki numarayı çıkarımıza uygun biçimde kullanarak şunu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
& F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} \\
= {} & 1 + (F_1 + F_2) + (F_3 + F_4) + \cdots + (F_{2n-3} + F_{2n-2}) \\
= {} & F_{2n}
\end{aligned}
$$

KOYU MATEMATİK

Aslında aynı cevaba daha önce gösterdiğimiz bir başka yolla da ulaşabilirdik. Eğer ilk $2n-1$ Fibonacci sayısından, ilk $n-1$ çift indisli Fibonacci sayısını çıkarırsak, geriye elimizde ilk n tek indisli Fibonacci sayıları kalır

$$\begin{aligned}&F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}\\&=(F_1+F_2+\cdots+F_{2n-1})-(F_2+F_4+\cdots+F_{2n-2})\\&=(F_{2n+1}-1)-(F_{2n-1}-1)\\&=F_{2n}\end{aligned}$$

Fibonacci Üzerinden Sayma

Fibonacci sayıları tarafından sağlanan güzelim sayı düzenleri konusunda bahsettiklerimiz, henüz bahsetmediklerimizin yanında devede kulak kalır. Muhtemelen bu sayıların tavşan çiftlerinden başka şeyleri de sayması gerektiği konusunda bir öngörünüz oluşmuştur. Gerçekten de, Fibonacci sayıları bir sürü sayma probleminin çözümünde ortaya çıkarlar. 1150 yılında (Pisalı Leonarda henüz tavşanlar hakkında yazmamış iken), Hintli şair Hemachandra şu soruyu sordu, bir kadans (müzikte perdelerin derece derece inmesi), uzunluğu bir olan kısa heceleri veya uzunluğu iki olan uzun heceleri içerebiliyor olsun. Bu durumda uzunluğu n olan kaç tane kadans mümkündür? Bu soruyu matematiksel terimlerle daha basit biçimde ifade edelim.

Soru: Bir n sayısını 1 ve 2'lerin toplamı olarak kaç farklı biçimde yazabiliriz?

Cevap: Çözümü f_n ile gösterelim ve önce küçük n değerleri için denemeler yapalım.

n	**Toplamları n olan 1-2 dizileri**	f_n
1	1	1
2	11, 2	2
3	111, 12, 21	3
4	1111, 112, 121, 211, 22	5
5	11111, 1112, 1121, 1211, 122, 2111, 212, 221	8
⋮	⋮	⋮

Toplamları 1 yapan bir tane toplam var, toplamları 2 yapan iki tane farklı toplam var (1 + 1 ve 2), toplamları 3 yapan üç tane farklı toplam var (1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1). Bu arada şunu unutmayalım, toplamlarımızda sadece 1 ve 2 rakamlarını kullanma iznimiz var. Ayrıca, toplanan sayıların sırası da önemlidir. Mesela 1 + 2 ile 2 + 1 ifadelerini birbirinden farklı görüyoruz. Toplamları 4 yapan beş tane farklı toplam var (1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2). Böylece tablodaki sayılar bize cevabın Fibonacci sayıları olabileceğini hissettiriyor ki gerçekten de durum böyledir.

Hadi neden toplamları 5 yapan $f_5 = 8$ tane farklı toplamın olduğunu görelim. Bu toplamlar 1 veya 2 ile başlamalı. Bunlardan kaç tanesi 1 ile başlar? Ayrıca, 1'den sonra toplamları 4 yapan 1 ve 2'lerden oluşan bir dizi olacak ve biliyoruz ki bunlar $f_4 = 5$ tanedir. Benzer biçimde, 5'i veren ve 2 ile başlayan kaç tane toplam vardır? Başlangıçtaki 2'den sonra gelen terimlerin toplamları 3 yapmalı ve bunların $f_3 = 3$ tane olduğunu biliyoruz. Böylece toplamları 5 yapan dizilerin sayısı $5+3=8$ tanedir. Benzer mantıkla, toplamları 6 yapan dizilerin sayısı için, 1 ile başlayanlar $f_5 = 8$ tane ve 2 ile başlayanlar $f_4 = 5$ tane olduğundan $f_6 = 13$ bulunur. Genel halde, toplamları n yapan f_n tane dizi vardır. Bunların f_{n-1} tanesi 1 ile f_{n-2} tanesi de 2 ile başlar. Buradan,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

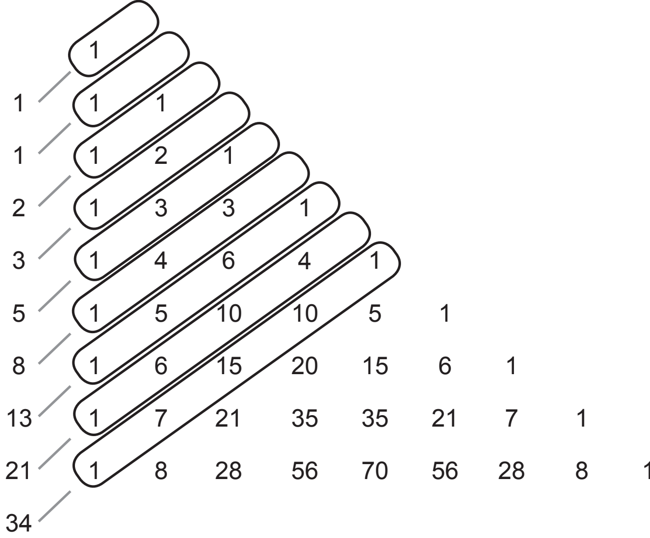
çıkar. Yani f_n sayıları Fibonacci sayıları gibi başlar ve Fibonacci sayıları gibi büyür. Bu yüzden bunlar Fibonacci sayılarıdır ama bir çeşit eğilip bükülmüş daha doğrusu ötelenmiş biçimidir. Dikkat edersek, $f_1 = 1 = F_2$, $f_2 = 2 = F_3$, $f_3 = 3 = F_4$ vb. (bütünlüklü olması bakımından $f_0 = F_1 = 1$ ve $f_{-1} = F_0 = 0$ olarak tanımlayalım). Dolayısıyla genel olarak, $n \geq 1$ için

$$f_n = F_{n+1}$$

eşitliğine ulaşırız.

Bir kere Fibonacci sayılarının neyi saydığını bilirsek bunun etinden sütünden faydalanarak bu sayıların bir sürü güzel özelliğini kanıtlamak için kullanabiliriz. Dördüncü Bölüm'ün sonunda gördüğümüz, Pascal Üçgeninin köşegenlerini topladığımızda ortaya çıkan düzeni hatırlayın.

Köşegen Toplamları



Örneğin, dokuzuncu köşegenin toplamından

$$1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$$

elde edilir. "Binom sayıları" cinsinden bunu

$$\binom{8}{0}+\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4}=F_9$$

olarak ifade edebiliriz. Hadi buradaki düzeni bir sayma problemini iki farklı yoldan cevaplayarak anlamaya çalışalım.

Soru: 1'ler ve 2'lerden oluşan toplamları 8 eden kaç tane dizi vardır.

Cevap 1: Tanımdan, $f_8 = F_9$ tane böyle dizi vardır.

Cevap 2: Burada çözümü kaç tane 2 kullandığımıza göre 5 duruma ayıralım. Hiç 2 kullanmadığımız kaç durum vardır? Sadece bir durum, o da 11111111, bu durum ile $\binom{8}{0}=1$ olması tesadüf değil.

Kaç tanesinde sadece bir tane 2 kullanılır? Bu 7 farklı şekilde mümkün, 2111111, 1211111, 1121111, 1112111, 1111211, 1111121, 1111112. Bu dizilerde 7 tane sayı var ve içlerindeki 2'nin yeri $\binom{7}{1}=7$ farklı biçimde seçilebilir.

Tam olarak kaç tanesinde iki tane 2 vardır? Tipik bir örnek olarak 221111 yazılabilir. Ortaya çıkacak olan 15 durumu listelemek yerine şu gözlemi yapalım, bu dizilerde iki tane 2 ve dört tane 1 olacak, yani toplamda altı basamak. Bu dizilerdeki 2'lerin yerleri $\binom{6}{2} = 15$ farklı biçimde seçilebilir. Benzer mantıkla, tam olarak üç tane 2 bulunduran dizilerde iki tane de 1 olacak, yani toplamda 5 basamağımız olacak, dolayısıyla bu dizileri de $\binom{5}{3} = 10$ farklı biçimde oluşturabiliriz. Ve son olarak, dört tane iki bulunduran sadece $\binom{4}{4} = 1$ tane dizi vardır, bu da 2222 dizisidir.

Cevap 1 ve Cevap 2 karşılaştırıldığında istediğimiz açıklamayı elde etmiş oluruz. Genel olarak aynı akıl yürütme, Pascal üçgeninin n-inci köşegenindeki girdiler toplandığında bir Fibonacci sayısı elde edileceğini kanıtlamak için kullanılabilir. Özel olarak, her $n \geq 0$ için, n-inci köşegen üzerindeki girdileri toplarsak (aşağı yukarı $n/2$ terim sonra köşegende eleman kalmaz), ve

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = f_n = F_{n+1}$$

eşitliği elde edilir.

Fibonacci sayıları üzerine buna denk ama görsel olarak düşünmenin daha kolay bir yolu "kaplama" meselesidir. Örneğin, $f_4 = 5$ sayısı, uzunluğu 4 olan bir şeridi, karelerle (uzunluğu 1) veya dominolarla (uzunluğu 2) kaplama yollarının sayısıdır. Mesela, 1 + 1 + 2 toplamı kare-kare-domino kaplamasını temsil eder.

1 + 1 + 1 +1 

1 + 1 + 2 

1 + 2 + 1 

2 + 1 + 1 

2 +2 

Kareler ve dominoların kullanıldığı uzunluğu 4 olan kaplamalar $f_4 = 5$ tanedir

Kaplamaları Fibonacci sayıları ile ilgili bir başka ilginç düzeni anlamak için kullanabiliriz. Hadi Fibonacci sayılarının karelerini aldığımızda neler olacağına bir bakalım.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$f_n^{\,2}$	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921

f_0 ile f_{10} arasındaki Fibonacci sayılarının kareleri

Artık iki ardışık Fibonacci sayısını toplamının bir sonraki Fibonacci sayısını vermesi bir sürpriz değil. (Her şeyin ötesinde zaten bu sayıları böyle oluşturduk.) Ancak karelerle ilgili ilginç bir şeylerin olacağını tahmin etmezdiniz. Gerçekten de ardışık kareleri topladığımızda neler olduğuna bir bakın:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
f_0^2 & + & f_1^2 & = & 1^2 & + & 1^2 & = & 1 & + & 1 & = & 2 & = & f_2 \\
f_1^2 & + & f_2^2 & = & 1^2 & + & 2^2 & = & 1 & + & 4 & = & 5 & = & f_4 \\
f_2^2 & + & f_3^2 & = & 2^2 & + & 3^2 & = & 4 & + & 9 & = & 13 & = & f_6 \\
f_3^2 & + & f_4^2 & = & 3^2 & + & 5^2 & = & 9 & + & 25 & = & 34 & = & f_8 \\
f_4^2 & + & f_5^2 & = & 5^2 & + & 8^2 & = & 25 & + & 64 & = & 89 & = & f_{10} \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Hadi bu düzeni sayma ile açıklamaya çalışalım. Son eşitlik

$$f_4^{\,2} + f_5^{\,2} = f_{10}$$

olduğunu söylüyor. Neden böyle? Bunu basit bir sayma problemi sorarak açıklayabiliriz.

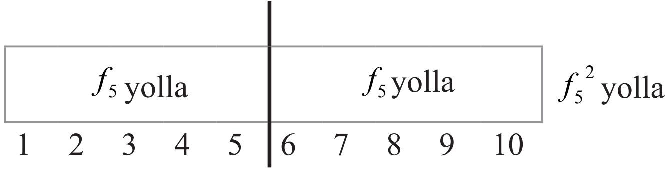
Soru: Uzunluğu 10 olan bir şeridi kareler ve dominolar kullanarak kaç farklı yolla kaplayabiliriz?

Cevap 1: Tanımdan f_{10} tane böyle kaplama olduğunu biliyoruz. Misal olarak 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 ile temsil edilen şu tipik bir kaplamayı verelim:



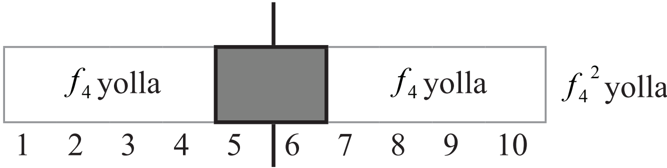
Bu kaplamaya 2, 3, 4, 6, 7, 9 ve 10 hücrelerinden *kırılabilir kaplama* diyeceğiz. (Denk olarak, bir kaplama dominoların ortası hariç her yerden kırılabilir. Bu örnekte 1, 5 ve 8 *kırılamaz* hücrelerdir.)

Cevap 2: Çözümü iki duruma ayıralım: 5. hücreden kırılabilen kaplamalar ve kırılamayan kaplamalar. 5. hücreden kırılabilir uzunluğu 10 olan kaç tane kaplama yapabiliriz? Böyle kaplamalar iki yarıma ayrılabilir, sol yarım $f_5 = 8$ yolla kaplanabilir ve sağ yarım da yine $f_5 = 8$ yolla kaplanabilir. Böylece 4. Bölüm'deki çarpma kuralından böyle bir kaplamayı $f_5^{\,2} = 8^2$ farklı yolla (aşağıda da gösterildiği gibi) oluşturabileceğimizi görürüz.



Uzunluğu 10 olan ve 5. hücreden kırılabilir $f_5^{\,2}$ farklı kaplama vardır

Uzunluğu 10 olan ve 5. hücreden kırılamayan kaç tane kaplama vardır? Böyle bir kaplamada aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi 5. ve 6. hücrelerde bir domino kaplaması olmalıdır. Şu durumda sol ve sağ yarımın her biri $f_4 = 5$ yolla kaplanabilir, yani 5. hücreden kırılamayan $f_4^{\,2} = 5^2$ farklı kaplama vardır. Bu iki durumu bir araya getirirsek, istenen $f_{10} = f_5^{\,2} + f_4^{\,2}$ eşitliği elde edilir.



Uzunluğu 10 olan ve 5. hücreden kırılamayan $f_4^{\,2}$ farklı kaplama vardır

Genel halde, $2n$ uzunluğundaki bir kaplamanın ortasından kırılabilir olup olmadığını göz önüne alarak aşağıdaki güzel düzeni elde ettik:

$$f_{2n} = f_n^{\,2} + f_{n-1}^{\,2}$$

KOYU MATEMATİK

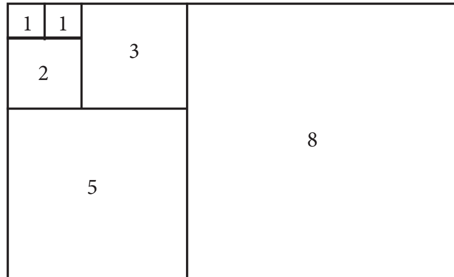
Yukarıdaki özdeşliği gördükten sonra bunu benzer durumlara genişletebiliriz. Örneğin, uzunluğu $m + n$ olan kaplamaları göz önüne alalım. Bu kaplamalardan kaç tanesi m-inci hücreden kırılabilir? Sol taraf f_m yolla, sağ taraf ise f_n yolla kaplanabilir; dolayısıyla bu biçimde $f_n f_m$ tane kaplama vardır. Kaç tanesi m-inci hücreden kırılamaz? Böyle kaplamaların m-inci ve $m + 1$-inci hücreleri bir domino ile kaplanmıştır, böylece geriye kalan kısımlar $f_{m-1} f_{n-1}$ yolla kaplanabilir. Hepsini bir araya getirirsek $m, n \geq 0$ için aşağıdaki işe yarar özdeşliği elde ederiz:

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$$

Yeni bir düzen keşfetme zamanı. Hadi bütün Fibonacci sayılarının karelerini birbirine eklediğimizde neler olacağını görelim.

$$1^2 + 1^2 = 2 = 2 \times 1$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \times 5$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \times 8$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 = 8 \times 13$$
$$\vdots$$

Vay be, bu çok havalı! Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı sonuncu Fibonacci sayısı ile bir sonrakinin çarpımına eşit! Ama neden 1, 1, 2, 3, 5 ve 8 sayılarının karelerinin toplamı, 8 x 13 sayısına eşit olsun ki? Bunu geometrik şekillerle "görmenin" bir yolu, kenar uzunlukları 1, 1, 2, 3, 5 ve 8 olan altı tane kare alıp bunları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bir araya getirmek.



1'e 1'lik (yani (1×1)'lik) bir kare ile başla, yanına 1×1'lik başka bir kare daha koy, böylece 1×2'lik bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgenin

altına 2×2'lik bir kare yerleştir, böylece 3×2'lik bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgenin uzun kenarının yanına 3×3'lük bir kare yerleştir (3×5'lik bir dikdörtgen oluşturmak için), oluşan şeklin altına 5×5'lik bir kare yerleştir (8×5'lik bir dikdörtgen oluşturmak için). Son olarak bu şeklin yanına 8×8'lik bir kare yerleştir, böylece 8 x 13'lük dev bir dikdörtgen ortaya çıkar. Şimdi basit bir soralım.

Soru: Bu dev dikdörtgenin alanı nedir?

Cevap 1: Bir taraftan, bu dikdörtgenin alanı onu oluşturan karelerin alanları toplamına eşittir, yani diğer bir ifade ile dikdörtgenin alanı $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$ sayısıdır.

Cevap 2: Diğer taraftan yüksekliği 8 ve genişliği $5 + 8 =$ 13 olan dev bir dikdörtgenimiz var ve alanı da 8×13 olacaktır.

Her iki cevap da aynı alanı verdiği için eşit olmalılar, bu da en son özdeşliği açıklar. Esasında eğer büyük dikdörtgeni nasıl oluşturduğumuzu tekrar gözden geçirirseniz listelediğimiz bütün eşitliklerin ($1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \times 8$ gibi) neden bu uyumu gösterdiği açıklanmış olur. Eğer bu mantıkla devam ederseniz boyutları 13 x 21, 21 x 34 vb olan dikdörtgenler oluşturacaksınız ve bu düzen bu şekilde sonsuza kadar devam edecek. Genel formül,

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + F_n^{\ 2} = F_n F_{n+1}$$

olduğunu söyler.

Şimdi de Fibonacci *komşularını* birbirleriyle çarpınca ne olduğunu görelim. Örneğin, 5'in komşuları 3 ve 8 sayılarıdır ve bunların çarpımı $3 \times 8 =$24 olup 5^2'den 1 eksiktir. 8'in komşuları 5 ve 13'tür ve bunların çarpımı 5 x 13 = 65 olup 8^2'den bir fazladır. Aşağıdaki tabloyu inceleyince, komşularının çarpımının merkezdeki Fibonacci sayısının karesinden daima bir birim uzakta olduğu sonucunu çıkarmamak elde değil. Diğer bir ifade ile

$$F_n^{\ 2} - F_{n-1} F_{n+1} = \pm 1$$

bulunur.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
F_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921
$F_{n-1}F_{n+1}$	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920
$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Bir Fibonacci sayısının komşularının çarpımı o sayının karesinden bir birim uzaktadır

Gelecek bölümde öğreneceğimiz (adına tümevarım denilen) bir kanıt tekniği ile $n \geq 1$ için,

$$F_n^{\ 2} - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

eşitliği kanıtlanabilir.

Hadi *daha uzak* komşulara bakarak bu ilişkiyi daha da ileri götürelim. $F_5 = 5$ Fibonacci sayısına bakalım. Bu sayının hemen dibindeki komşularını çarptığımızda $3 \times 8 = 24$ yani 5^2'den 1 uzakta olduğunu gördük. Aslında bu sayının iki uzak komşularını da çarpsak 2 x 13 = 26 elde ederiz, ki bu da 5^2'den 1 uzaktadır. Peki ya 3, 4 ya da 5 uzaktaki komşularını çarparsak ne olur? Bunların çarpımları 1 x 21 = 21 , ve $0 \times 5 = 0$ olur. Bu sayılar 25'ten ne kadar uzaktalar. Sırasıyla 4, 9 ve 25 uzaktalar ki bu sayıların hepsi birer tamkare. Ama öyle *alelade* tamkareler de değil, Fibonacci sayılarının kareleriler! Daha fazla delil için aşağıdaki tabloyu inceleyin. Genel ilişkiyi şöyle ifade edebiliriz:

$$F_n^{\ 2} - F_{n-r}F_{n+r} = \pm F_r^{\ 2}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
F_n	1	1	2	3	**5**	8	13	21	34	55	
F_n^2	1	1	4	9	**25**	64	169	441	1156	3025	$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r}$
$F_{n-1}F_{n+1}$	0	2	3	10	**24**	65	168	442	1155	3026	± 1
$F_{n-2}F_{n+2}$		0	5	8	**26**	63	170	440	1157	3024	± 1
$F_{n-3}F_{n+3}$			0	13	**21**	68	165	445	1152	3029	± 4
$F_{n-4}F_{n+4}$				0	**34**	55	178	432	1165	3016	± 9
$F_{n-5}F_{n+5}$					**0**	89	144	466	1131	3050	± 25
⋮						⋮					⋮

Bir Fibonacci sayısının uzak komşularının çarpımı daima kendisinin karesine yakındır. Aradaki fark daima bir Fibonacci sayısının karesidir.

Daha Fazla Fibonacci İlişkisi

Pascal üçgeninde, tek ve çift sayıların şaşırtıcı bir biçimde karmaşık bir davranış sergilediklerini görmüştük. Ama Fibonacci sayılarında durum çok daha basittir. Hangi Fibonacci sayıları çifttir?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Çift olanlar $F_3 = 2$, $F_6 = 8$, $F_9 = 34$, $F_{12} = 144$ böyle devam eder. (Bu kesimde tekrardan büyük-F Fibonacci sayılarına geçiş yaptık, çünkü bunların sağladıkları güzel düzenleri elde edeceğiz.) Çift sayıların ilk ortaya çıktıkları konumların 3, 6, 9, 12 olması tam olarak her üçüncü terimin çift olacağı iddiasını ortaya koyar. Aslında bu sayıların

tek, tek, çift

düzeninde başladığına dikkat edersek, bu daha sonra

tek, tek, çift, tek, tek, çift, tek, tek, çift…

şeklinde devam etmesini zorunlu kılar. Çünkü bir "tek, tek, çift" bloğundan sonra gelen blok "tek + çift = tek" ile başlamalı, "çift + tek = tek" ve "tek + tek = çift" ile devam etmeli, dolayısıyla bu düzende sonsuza kadar devam eder.

3. Bölüm'deki denklikler dilinden söylersek, her çift sayı (mod 2)'de sıfıra denk, her tek sayı (mod 2)'de bire denk ve $1 + 1 \equiv 0 \pmod 2$ olur. Dolayısıyla Fibonacci sayılarının mod 2 versiyonları aşağıdaki biçimdedir

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0…

Peki ya 3'ün katları? İlk ortaya çıktığı yerler olan $F_4 = 3$, $F_8 = 21$, $F_{12} = 144$ gözlemlenirse, sanki her dördüncü Fibonacci sayısının 3'ün katı olacağı beklentisi oluşur. Bu iddiayı kanıtlamak için Fibonacci sayılarını mod 3 yardımıyla 0, 1 ve 2 sayılarına indirgeyelim ve

$$1 + 2 \equiv 0 \text{ ve } 2 + 2 \equiv 1 \pmod 3$$

olduklarını hatırlayalım. Bu durumda Fibonacci sayılarının $\pmod 3$ versiyonları aşağıdaki gibi olur.

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1 …

Sekiz terim sonra tekrar 1, 1 ile başlayan kısma geri dönüyoruz ve bu düzen, her dördüncü terimin sıfır olduğu, sekiz terimlik bloklar halinde

devam ediyor. Böylece her dördüncü Fibonacci sayısı 3'ün bir katıdır.

Bunun gibi mod 5, mod 8 veya mod 13 aritmetiği kullanılarak sırasıyla

Her beşinci Fibonacci sayısı 5'in bir katıdır

Her altıncı Fibonacci sayısı 8'in bir katıdır

Her yedinci Fibonacci sayısı 13'ün bir katıdır

ifadeleri gösterilebilir ve bu düzenler devam eder.

Peki ya *ardışık* Fibonacci sayıları? Herhangi bir ortak özellikleri var mıdır? Bir açıdan bakarsak şöyle ilginç bir şeyi gösterebiliriz "*hiçbir*" ortaklıkları yoktur. Ardışık Fibonacci ikilileri

(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13), (13, 21), (21, 34),…

aralarında asaldır, yani her ikisini de bölen 1'den büyük bir sayı yoktur. Örneğin son ikiliye bakarsak, 21'in bölenleri 1, 3, 7 ve 21 sayılarıdır. 34'ün bölenleri ise 1, 2, 17 ve 34 sayılarıdır. Yani 21 ile 34 sayılarının 1'den başka ortak bölenleri yoktur. Peki, bu durumun sonsuza kadar böyle devam edeceğini nereden biliyoruz? Bir sonraki (34, 55) ikilisinin aralarında asal olacaklarını nasıl garanti ederiz? Bunu 55'in çarpanlarını bulmadan kanıtlayabiliriz. Aksini varsayalım, yani hem 34 hem de 55 sayılarını bölen bir $d > 1$ tamsayısı olsun. Ancak bu durumda bu d sayısı 55 - 34 = 21 farkını da bölmek zorunda kalırdı (çünkü 55 ve 34 sayıları d sayısının katı ise bunların farkı da katıdır). Ancak bu imkânsızdır, çünkü 21 ile 34 sayılarının ikisini birden bölen bir $d > 1$ tamsayısının olmadığını zaten biliyoruz. Bu akıl yürütme devam ettirilerek bütün ardışık Fibonacci ikililerinin aralarında asal olacağı garanti edilir.

Sıra geldi benim favori Fibonacci gerçeğime! Herhangi iki sayının *ortak bölenlerinin en büyüğü* bu iki sayıyı da bölen sayıların en büyüğüdür. Örneğin 20 ile 90 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 10'dur ve bu

obeb (20, 90) = 10

olarak gösterilir. Peki, 20-nci Fibonacci sayısı ve 90-ıncı Fibonacci sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü sizce kaçtır? Şiirsel bir sonuca hazır olun. Yanıt 55, ki 55 sayısı da bir Fibonacci sayısı. Ve sıkı durun, 10-uncu Fibonacci sayısı! Eşitliklerle yazarsak,

$$obeb\ (F_{20}, F_{90}) = F_{10}$$

Bunu genel olarak yazacak olursak, m ve n tamsayıları için,

$$obeb(F_m, F_n) = F_{obeb(m,n)}$$

Diğer bir ifade ile, "*F*'lerin obeb'i obeb'lerin *F*'idir"! Bu muhteşem gerçeği burada kanıtlayamayacağız ama size bahsetmeden geçmeye gönlüm razı olmazdı.

Bazen bir düzen yanıltıcı da olabilir. Mesela, hangi Fibonacci sayıları asaldır? (1'den büyük bir sayının 1 ve kendisi dışında başka böleni yoksa bu sayılara asal sayı denilir, asal sayılarla ilgili tartışmalara önümüzdeki bölümde gireceğiz.) Asal olmayan 1'den büyük sayılara bileşik sayı denilir, bu sayılar kendisinden küçük sayıların çarpımı olarak yazılabilir. İlk birkaç asal sayıyı yazalım

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Şimdi sıra numaraları asal olan Fibonacci sayılarına bakalım:

$$F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_{11} = 89,\ F_{13} = 233,\ F_{17} = 1597$$

2, 5, 13, 89, 233 ve 1597 sayılarının hepsi asal. Şöyle bir düzen görünüyor, bir $p > 2$ asal sayı için F_p sayısı da asaldır. Ancak bu düzen bir sonraki sıra numarasında sağlanmıyor. $F_{19} = 4181$ asal değildir, çünkü 4181 = 37 x 113. Bununla beraber şu doğrudur, 3'ten büyük olan her asal Fibonacci sayısının sıra numarası da asaldır. Bu daha önce gösterdiğimiz bir düzenden elde edilebilir. F_{14} bileşik olmalıdır, çünkü her 7-nci Fibonacci sayısı $F_7 = 13$ sayısının bir katıdır (gerçekten de, $F_{14} = 377 = 13 \times 29$).

Aslında görünen o ki Fibonacci sayılarından asal olanlar oldukça azdır. Bu yazının hazırlandığı zamana kadar sadece 33 tane asal Fibonacci sayısı tespit edilmiştir; bunların en büyüğü F_{81839} sayısıdır ve sonsuz çoklukta asal Fibonacci sayısının olup olmadığı matematikteki açık problemlerden birisidir.

Bu ciddi tartışmayı, Fibonacci sayılarıyla ilgili bir numaraya dayanan ve sizi eğlendireceğini düşündüğümüz bir sihir ile sonlandıralım.

Satır 1:	**3**
Satır 2:	**7**
Satır 3:	**10**
Satır 4:	**17**
Satır 5:	**27**
Satır 6:	**44**
Satır 7:	**71**
Satır 8:	**115**
Satır 9:	**186**
Satır 10:	**301**

Sihirli bir Fibonacci numarası: Herhangi iki pozitif sayıyı satır 1 ve satır 2'ye yerleştir. Tablonun geri kalanını Fibonacci tarzıyla doldur (3 + 7 = 10, 7 + 10 = 17 vs), daha sonra 10. satırdaki sayıyı 9. satırdaki sayıya böl. Yanıtın 1.61 ile başlayacağını garanti ediyoruz.

Yukarıdaki tabloyu oluştururken, 1 ile 10 arasındaki herhangi iki sayıyı birinci ve ikinci satıra yazarız. Bu iki sayıyı toplayıp sonucu üçüncü satıra yazarız. 2. ve 3. satırdaki sayıları toplarız ve 4. satıra yazarız. Böyle Fibonacci tarzıyla devam ederek tabloyu doldururuz (3. satır + 4. satır = 5. satır vs), ta ki 10. satıra kadar olan bütün satırlar doluncaya kadar. Şimdi 10. satırdaki sayıyı 9. satırdaki sayıya böleriz ve ondalık kısmı da dâhil olmak üzere ilk üç basamağı okuruz. Mesela bu örnekte, $\frac{301}{186} = 1.618279...$ çıkar, dolayısıyla ilk üç basamak 1.61 sayısıdır. İster inanın ister inanmayın, birinci ve ikinci satıra herhangi iki pozitif sayı yazarak başladığınızda (ne tam olmak zorundalar ne de 1 ile 10 arasında), bu durumda 10. ve 9. satırların oranının 1.61 sayısı olacağı garantidir. Kendi kendinize bir örnek yazın.

Bu numaranın neden çalıştığını görmek için hadi 1. ve 2. satırdaki sayıları sırası ile x ve y ile gösterelim. Böylece Fibonacci kuralından 3. satır $x + y$, 4. satır $y + (x + y) = x + 2y$ olmalıdır ve böyle devam edilerek aşağıdaki tablo elde edilir.

Satır 1:	x
Satır 2:	y
Satır 3:	$x + y$
Satır 4:	$x + 2y$
Satır 5:	$2x + 3y$
Satır 6:	$3x + 5y$
Satır 7:	$5x + 8y$
Satır 8:	$8x + 13y$
Satır 9:	$13x + 21y$
Satır 10:	$21x + 34y$

Söz konusu sayı için 10 ve 9 numaralı satırlardaki girdilerin oranına bakalım:

$$\frac{\text{Satır 10}}{\text{Satır 9}} = \frac{21x + 34y}{13x + 21y}$$

Peki, ama neden bu oran daima 1.61 ile başlamalı? Yanıt kesirleri *yalan yanlış* toplama fikrine dayanıyor. Varsayalım ki $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ paydaları b ve d pozitif olacak biçimde iki kesir olsun. Eğer paylarını ve paydalarını kendi aralarında toplarsanız ne olur? İster inanın ister inanmayın ama "aradeğer (mediant)" olarak adlandırılan elde edeceğiniz bu sayı, daima orijinal iki sayının ortasında bir yerlerde yer alır. Yani a/b ve c/d kesirleri b ve d pozitif olacak biçimde herhangi iki kesir olmak üzere,

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Örneğin, başlangıçtaki kesirlerimiz 1/3 ve 1/2 olsun, bunların aradeğeri 2/5 kesridir ve ikisinin arasında yer alır: 1/3 < 2/5 <1/2.

KOYU MATEMATİK

Aradeğer neden orijinal iki sayının arasında yer alır? Bunu görmek için b ve d pozitif olacak biçimde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ kesirleri ile başlayalım. Bu durumda *ad* < *bc* olur. Her iki tarafa *ab* eklersek $ab + ad < ab + bc$ yani $a(b+d) < (a+c)b$ elde edilir, ki bu da $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ ifadesini verir. Benzer mantıkla $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ eşitsizliği de elde edilir.

Şimdi şuna bakalım, $x, y > 0$ için,

$$\frac{21x}{13x} = \frac{21}{13} = 1.615...$$

$$\frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1.619...$$

Bunların aradeğerleri aralarında kalmalı, yani

$$1.615... = \frac{21}{13} = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1.619...$$

Dolayısıyla satır 10'uncu satırın 9'a oranı 1.61 ile başlamalı, tam da öngörüldüğü gibi!

KOYU MATEMATİK

Tahmininizin 1.61 olduğunu açık etmeden önce, tablodaki sayıların toplamını hemen söyleyip seyircilerinizi etkileyebileceğiniz bir başka numara daha söyleyeyim. Mesela 3 ve 7 ile başladığımız örneği ele alırsak, tablodaki sayılara şöyle bir göz atıp bu sayıların hepsinin toplamının 781 olduğunu söyleyebilirsiniz. Bunu nerden biliyoruz? Cebir sayesinde. Şimdi ikinci bir tabloya sayıların toplamlarını yazarsak, hepsinden elde edeceğimiz en büyük toplam $55x + 88y$ olur. Peki, bu ne işimize yarar? Şöyle ki bu sayı aslında

$$11(5x + 8y) = 11 \times \text{sıra } 7$$

şeklindedir. Dolayısıyla 7.satırdaki sayıya bakıp (bizim örneğimizde bu sayı 71) bunu 11 ile çarparsanız (Bölüm 1'de 11'le çarpma için bir numara göstermiştik), bütün sayıların toplamının 781 olduğunu elde edersiniz.

Bu 1.61 sayısının ne özelliği var? Eğer tabloyu devam ettirerek daha da genişletirseniz, ardışık terimlerin oranlarının arttığını ve giderek altın oran olarak adlandırılan

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803...$$

sayısına yaklaştığını görürsünüz. Matematikçiler bu sayıyı bazen Yunan harflerinden ϕ ile gösterirler, bu harf fay (π'nin İngilizce telaffuzu ile kafiyeli biçimde) veya "fi" aynen "phi-bonacci" sözcüğündeki gibi telaffuz edilir.

KOYU MATEMATİK

Cebir yardımıyla ardışık Fibonacci sayılarının oranlarının giderek altın orana yani *a* sayısına yaklaştıklarını kanıtlayabiliriz. Varsayalım ki n büyüdükçe F_{n+1}/F_n oranı bir r sayısına giderek yaklaşıyor. Ama bu arada Fibonacci sayılarının tanımından $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğunu biliyoruz, böylece

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Şimdi, n giderek büyüdüğünde, sol taraf r'ye ve sağ taraf ise $1+\frac{1}{r}$ sayısına yaklaşır. Yani,

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

Bu eşitliğin her iki tarafını r ile çarparsak,

$$r^2 = r + 1$$

elde edilir, yani $r^2 - r - 1 = 0$. İkinci derece denklemlerin kök bulma formülünden bu denklemin tek pozitif çözümü $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ çıkar, yani altın orandır.

Binet formülü olarak adlandırılan ve n-inci Fibonacci sayısını hesaplamaya yarayan aşağıdaki büyüleyici formüle bakalım:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Bu formülde, bütün sağdaki soldaki $\sqrt{5}$ terimlerinin bir şekilde bir tamsayı vermesini hem çok enteresan hem de şaşırtıcı bulurum!

Binet formülünü pratikte daha kullanışlı hale getirebiliriz, şöyle ki

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803...$$ (aynen daha önceki noktalar gibi!)

değeri -1 ile 0 arasındadır ve kuvvetini arttırdığımızda giderek sıfıra yaklaşır. Buradan yola çıkarak, aslında $n \geq 0$ için $a^n / \sqrt{5}$ değerini hesaplayıp en yakın tamsayıya yuvarlarsak, F_n sayısını hesaplayabileceğimiz görülebilir. Hadi hesap makinenizi alın ve bunu deneyin. Eğer a sayısını yaklaşık olarak 1.618 alırsanız bunun 10. kuvveti 122.966… olur (şüpheli derecede 123 sayısına yakın). Şimdi bunu $\sqrt{5} \approx 2.236$ sayısına bölerseniz 54.992 elde edersiniz. Bu sayının yuvarlanmış biçimi size $F_{10} = 55$ olduğunu söyler, ki bunun böyle olduğunu daha önceden de biliyoruz. Eğer a^{20} değerini alırsanız 15126.99993 elde edersiniz, bunu $\sqrt{5}$ ile böldüğünüzde ise 6765.00003 çıkar, yani $F_{20} = 6765$. Bilgisayar yardımıyla $a^{100} / \sqrt{5}$ değerini hesaplarsanız size F_{100} sayısının yaklaşık olarak 3.54×10^{20} olduğunu söyler.

Şimdi yaptığımız hesaplamalar gösterdi ki a^{10} ve a^{20} sayıları pratik anlamda tamsayılardır. Buradaki durum tam olarak nedir? Şimdi Lucas ("loo-kah" olarak telaffuz ediliyor) sayılarına dikkatimizi verelim,

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, …

Fransız matematikçi Édouard Lucas'ın (1842-1891) onuruna bu sayılara Lucas sayıları denilmektedir. Édouard Lucas, daha önce gördüğümüz en büyük ortak bölen özelliği de dâhil olmak üzere, bu sayılar ve Fibonacci sayıları hakkında bir sürü güzel özelliği keşfeden kişidir. Aslında 1, 1, 2, 3, 5, 8, … sayılarına Fibonacci sayıları adını veren kişi de Lucas'tır. Lucas sayıları da Binet formülünün kendilerine has (bir bakıma daha sade) bir biçimini sağlarlar,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Diğer bir bakış açısı ile $n \geq 1$ olmak üzere L_n sayısı a^n sayısına en yakın olan tamsayıdır. (Bu daha önceden gördüğümüz $a^{10} \approx 123 = L_{10}$ ile tutarlıdır.) Fibonacci ve Lucas sayılarının başka bazı ilişkilerinin aşağıdaki tablodan görebiliriz.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$F_{n-1}+F_{n+1}$		3	4	7	11	18	29	47	76	123
$L_{n-1}+L_{n+1}$		5	10	15	25	40	65	105	170	275
$F_n L_n$	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765

Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve bazı ilişkileri

Adeta ben buradayım diye bağıran bazı özellikler gözünüze çarpmıştır. Örneğin, bir Fibonacci sayısının komşularını toplarsak bir Lucas sayısı elde ederiz:

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

ve bir Lucas sayısının komşularını toplarsak ona karşılık gelen Fibonacci sayısının 5 katını elde ederiz

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

Karşılıklı iki Fibonacci ve Lucas sayılarını çarparsak, başka bir Fibonacci sayısı elde ederiz!

$$F_n L_n = F_{2n}$$

KOYU MATEMATİK

Hadi Binet formülleri ve birazcık cebir yardımıyla (aslında

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

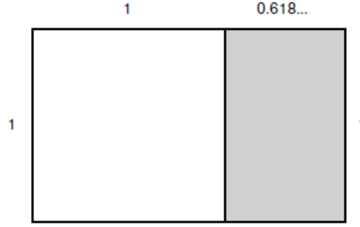
özdeşliğini kullanarak) sonuncu verdiğimiz özelliği kanıtlayalım. $h = (1-\sqrt{5})/2$ olarak alırsak Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri şöyle ifade edilebilir:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - h^n) \quad \text{ve} \quad L_n = a^n + h^n$$

Bu iki ifadeyi birbiri ile çarparsak aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$F_n L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - h^n)(a^n + h^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{2n} - h^{2n}) = F_{2n}$$

Peki, bu "altın oran" ismi nereden geliyor? Uzun kenarının kısa kenarına oranı tam olarak $a = 1.61803...$ olan aşağıdaki altın dikdörtgenden geliyor.



Altın dikdörtgenden yine altın orana sahip daha küçük bir dikdörtgen üretilebilinir

Eğer kısa kenarları 1 birim olarak alır ve dikdörtgenden 1×1'lik bir kareyi çıkarırsak geriye kalan dikdörtgenin boyutları $1 \times (a-1)$ olur, böylece uzun kenarının kısa kenarına oranı

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{0.61803...} = 1.61803... = a$$

Böylece küçük dikdörtgen de orijinal dikdörtgenle aynı oranlara sahip olur. Bu arada altın oran a sayısı bu özelliğe sahip tek sayıdır, çünkü $\frac{1}{a-1} = a$ ifadesi $a^2 - a - 1 = 0$ ifadesine denktir, ikinci derece denklemlerin kök bulma formülünden biliyoruz ki bu ikinci derece denklemin tek pozitif kökü $(1+\sqrt{5})/2 = a$ sayısıdır.

Bu özelliğinden dolayı, bazılarına göre altın dikdörtgen estetik açıdan en güzel dikdörtgendir. Bir sürü sanatçı, mimar ve fotoğrafçı altın oranı çalışmalarında bilerek kullanmışlardır. Leonarda da Vinci'nin eski dostu ve aynı zamanda çalışma arkadaşı Luca Pacioli altın orana "ilahi oran" adını vermiştir.



Fibonacci sayıları ve altın oran birçok sanatçıya, mimara ve fotoğrafçıya ilham kaynağı olmuştur. (Fotoğraf için Natalya St. Clair'e teşekkürler)

Altın oranın sağladığı o kadar çok müthiş matematiksel özellik var ki bu bazılarında olmadığı yerlerde bile altın oran görme çabası yaratıyor. Örneğin Da Vinci Şifresi adlı kitabında yazar Dan Brown 1.618 sayısının her yerde ortaya çıktığını, insan vücudunun bunun bir açık delili olduğunu iddia ediyor. Örneğin, bir insanın boyunun, yerden göbek deliğine kadar olan uzunluğa oranının daima 1.618 olduğu iddia ediliyor. İşin aslı bu deneyi şahsen yapmadım ancak *College Mathematics Journal* adlı dergide yayınlanan George Markowski'nin "Altın Oran Hakkındaki Yanlış Kanılar" adlı makalesine göre, basitçe söylemek gerekirse, bu iddia doğru değil. Ancak bazı insanlar ne zaman 1.6'ya yakın bir sayı ile karşılaşsalar bunun gerçekte altın oran olduğunu düşünüyorlar.

Fibonacci sayılarının sağladığı birçok sayısal özelliğin tümüyle şiirsel bir tınısı olduğunu defalarca söylemişimdir. İşte Fibonacci sayılarının bir şiirde ortaya çıkışına örnek. İngiliz şiirinde çoğu beş dizelik esprili şiirler aşağıdaki vezne sahiptir.

Şiir	Di	dib	Heceler
di-dum di-di-dum di-di-dum	5	3	8
di-dum di-di-dum di-di-dum	5	3	8
di-dum di-di-dum	3	2	5
di-dum di-di-dum	3	2	5
di-dum di-di-dum di-di-dum	5	3	8
Toplam	**21**	**13**	**34**

Fibonacci sayılarının şiiri

Her bir satırdaki heceleri sayarsanız Fibonacci sayılarının her yerde olduğunu görürsünüz!

(Yazarın bundan esinlenerek yazdığı kendi Fibonacci şiirini orjinaline dokunmadan sizlerle paylaşıyoruz.)

I think Fibonacci is fun.

It starts with a 1 and a 1.

Then 2, 3, 5, 8.

But don't stop there, mate.

The fun has just barely begun!

ALTINCI BÖLÜM

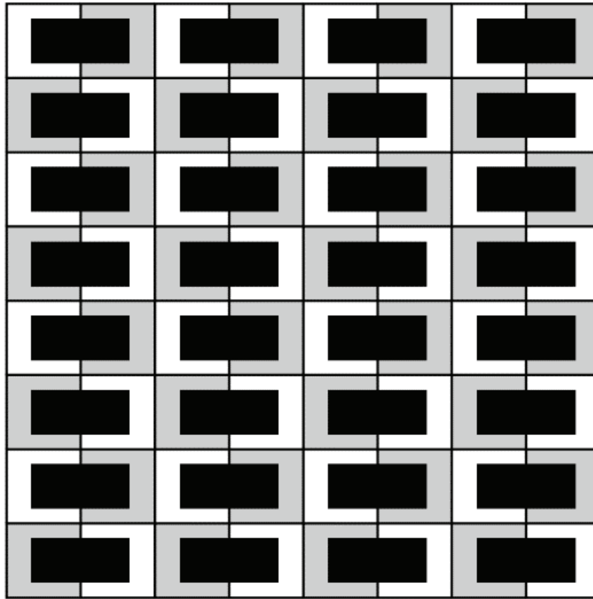
1 + 2 + 3 = 1 x 2 x 3 = 6

Kanıtın Sihri

Kanıtların Değeri

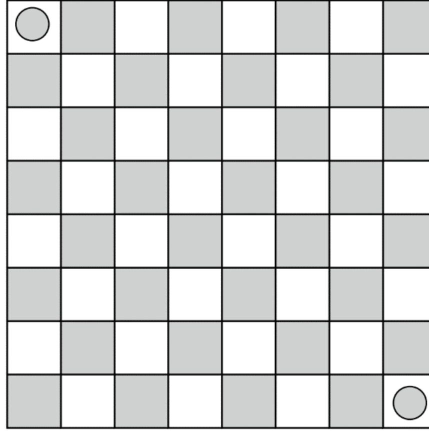
Matematik yapmanın en büyük eğlencelerinden ve onu diğer bilimlerden ayıran özelliklerinden biri, şüphe gölgelerinin ardında olan şeyleri kanıtlamaktır. Diğer bilimlerde kesin kanunları kabul ederiz çünkü gerçek dünya ile uyum sağlarlar. Fakat bu kanunlar yeni bir delil ortaya çıktığında önceki haliyle çelişebilir ya da geliştirilebilirdir. Fakat matematikte eğer bir önermenin doğru olduğu kanıtlanmışsa, o önerme sonsuza kadar doğrudur. Örneğin, iki bin yıl önce Öklid asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu kanıtlamıştır. O günden beri, bu önerme hakkında söyleyebileceğimiz ya da önermenin doğruluğu ile çelişen yapabileceğimiz hiç bir şey yoktur. Teknoloji gelir gider fakat teoremler sonsuza kadar kalır. Büyük matematikçi G. H. Hardy'nin bir zamanlar dediği gibi "Bir matematikçi tıpkı bir şair ya da ressam gibi örüntüler yaratır. Yarattığı örüntülerin diğerlerininkilerden daha kalıcı olmasının nedeni örüntülerinin fikirlerden ortaya çıkmasıdır." Benim için, akademik ölümsüzlüğe giden en iyi yol bir matematik teoremi kanıtlamaktan geçer.

Matematik bir şeyin kesin doğru olduğunu kanıtlamakla kalmaz, aynı zamanda bazı şeylerin *imkânsız* olduğunu da gösterir. Bazen birileri "Tersini kanıtlayamazsın." der. Bu, sanırım ortaya bir tane çıkana kadar mor bir inek olmadığını kanıtlayamazsın demektir. Fakat matematikte tersleri kanıtlayabilirsiniz. Örneğin, ne kadar zorlarsanız zorlayın iki çift sayının toplamı tek sayı etmez ya da ne kadar uğraşırsanız uğraşın bütün asal sayılardan büyük bir asal sayı bulamazsınız. Kanıtlar ilk seferki (ya da ikinci ya da üçüncü...) karşılaşmanızda biraz ürkütücü olabilir. Fakat kesinlikle sonradan edinilen bir zevktir. Bir kere alıştığınızda kanıtları okumak ya da kanıt yazmak oldukça eğlencelidir. İyi bir kanıt, iyi bir espri ya da güzel bir hikâye gibidir. Bittiğinde ağzınızda güzel bir tat bırakır. Şimdi size bir şeyin imkânsız olduğunu gösterdiğim ilk kanıt deneyimlerinden birini göstereyim. Çocukken oyunları ve bulmacaları çok severdim. Bir gün bir arkadaşım bana bir oyunu anlatan bir bulmaca sordu. Tabii ki bulmacaya hemen atladım. Bana 8 x 8'lik bir satranç tahtası gösterdi ve 32 tane 1 x 2'lik domino taşı getirdi. Bana "bütün bu domino taşlarıyla bu dama tahtasını kaplayabilir misin?" diye sordu. Ben de tabii ki kaplarsın. Her bir satıra 4 domino taşını şöyle koyarsan kaplarsın dedim."



8 x 8'lik Satranç tahtasını dominolarla kaplamak

“Çok iyi” dedi “Şimdi bu tahtadan sol üst köşedeki ve sağ alt köşedeki kareyi çıkardığımı düşün.” Bu iki kareye birer tane bozuk para koydu. Böylece o kareleri kullanamayacaktım. Şimdi bu 62 kareyi 31 tane domino ile kaplayabilir misin?”



Zıt iki köşe çıkarıldığında satranç tahtası kaplanabilir mi?

“Olabilir” dedim. Fakat ne kadar denediysem bir türlü kaplamayı başaramadım. Bu görevi yapmanın imkânsız olduğunu düşünmeye başlamıştım.

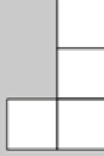
“Eğer bu işin imkânsız olduğunu düşünüyorsan bunun neden imkânsız olduğunu *kanıtlayabilir misin?*” diye sordu arkadaşım. Fakat bir şeyin imkânsız olduğunu olası milyonlarca ihtimali denemeden nasıl kanıtlayabilirdim ki? Sonra bana “Satranç tahtasındaki renklere bak” dedi.

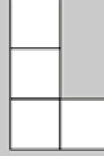
Renkler mi? Bu şeyin renklerle ne ilgisi olabilirdi ki? Biraz düşününce görmeye başladım. Her iki köşedeki renkler beyazdı. Böylece tahtada 30 beyaz 32 siyah kare kalmıştı ve her bir domino taşı bir siyah bir beyaz kare kapladığından, 31 tane domino taşının böyle bir tahtayı kaplaması imkânsızdı. Muhteşem!

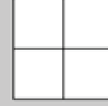
KOYU MATEMATİK

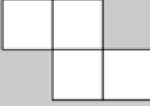
Bir önceki kanıtı sevdiyseniz şimdiki kanıt da hoşunuza gidecek. Tetris oyunu I, J, L, O, Z, T ve S diye adlandırılan 7 farklı şekil kullanır.

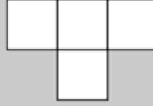


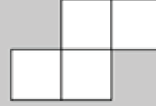






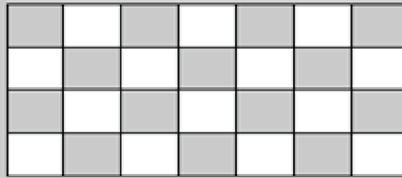






Bu 7 şekil 4 x 7'lik bir dikdörtgen oluşturabilir mi?

Her bir parça tam dört kareden oluşuyor. O zaman bu şekilleri döndürerek ya da ters yüz ederek bir şekilde birleştirip 4 x 7'lik bir dikdörtgen oluşup oluşmadığı sorusu oldukça doğal bir soru olarak karşımıza çıkıyor. Böyle bir dikdörtgen oluşturmak imkansızdır. Peki bunun imkânsız olduğunu nasıl kanıtlarsınız? 14 kareden oluşan bu dikdörtgeni 7 siyah 7 beyaz kare olarak aşağıdaki gibi iki renge boyayalım.



Dikkat ederseniz T şekli dışında diğer bütün şekilleri satranç tahtasında nereye koyarsanız koyun 2 siyah 2 beyaz kare kaplar. Fakat T harfinde 3 kare mutlaka aynı renk olmalıdır. Bu sebepten diğer altı şekil her nereye koyarsanız koyun 12 siyah 12 beyaz kareyi kaplayacaktır. Bu da bize 2 siyah 2 beyaz kalması demektir. Bu kareleri T harfi ile kaplamamız imkânsızdır.

Peki, eğer elimizde doğru olduğunu düşündüğümüz bir matematiksel önerme varsa kendimizi bu önermenin doğru olduğuna nasıl ikna edeceğiz? Tipik olarak işe negatif tam sayılar, pozitif tam sayılar ve sıfırı içeren *tam sayılar* topluluğu

..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

gibi üstünde çalışacağımız matematiksel objeleri tanımlayarak başlayacağız.

Objeleri bir kere tanımladıktan sonra bu objeler hakkında o objelerden doğal olarak beklediğimiz ("İki tam sayının çarpımı yine bir tam sayıdır" gibi) bazı özellikler hakkında varsayımlarda bulunacağız. (Bir sonraki bölümde "Herhangi iki noktadan bir doğru geçer." gibi önermeleri varsayacağız.) Bu gibi aşikâr önermelere *aksiyom* denir. Bu aksiyomlardan biraz mantık ve cebir bilgisiyle artık çok da bariz görünmeyen diğer doğru önermeleri çıkartacağız (bunlara *teorem* denir.) Bu bölümde matematiksel önermeleri kanıtlamak için kullanılan basit araçları öğreneceksiniz.

İnanması kolay teoremleri kanıtlayarak işe başlayalım. "İki çift sayının toplamı yine bir çift sayıdır" ya da "İki tek sayının çarpımı yine bir tek sayıdır." gibi önermeler duyduğumuzda genellikle kafamızda birkaç tane örnek bulup deneriz ve önerme aklımıza yatar. Bu önermeleri o kadar doğal bulursunuz ki bu teorem aslında bir aksiyom olmalı diye düşünebilirsiniz. Elimizde bulunan aksiyomlarla bu önermeyi *kanıtlayabileceğimizden* bu önermeyi aksiyom olarak kabul etmemize gerek yoktur. Tek ve çift sayılarla ilgili bir şeyi kanıtlayabilmemiz için öncelikle tek ve çift sayıların ne demek olduğunu anlamamız gerekir.

Çift sayı 2'nin katı olan sayılara denir. Bunu cebirsel olarak ifade etmek istersek, eğer herhangi bir k tam sayısı için n = 2k şeklinde yazılabiliyorsa n sayısına çift sayı denir. Peki 0 çift sayı mıdır? 0 = 0 x 2 olduğundan 0 çift sayıdır. Artık iki çift sayının çarpımının toplamının sayı çıkmasını kanıtlayabiliriz.

Teorem: m ve n çift sayıysa $m + n$ sayısı da çift sayıdır.

Bu teorem "eğer-ise" teorem tipinde bir örnektir. Bu tür bir önermeyi kanıtlamak için tipik olarak "eğer" kısmını varsayıp biraz cebir ve mantık bilgisiyle "ise" kısmını varsayımlarımızı kullanarak kanıtlamaya çalışırız.

Bu teoremde m ve n sayılarının çift olduğunu varsayıp $m + n$ sayısının

çift olduğu sonucuna ulaşmak istiyoruz.

Kanıt: m ve n sayılarının çift sayı olduklarını varsayalım. O zaman bu sayıları j ve k tam sayıları için $m = 2j$ ve $n = 2k$ şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$m + n = 2j + 2k = 2(j + k)$$

çıkar. $j + k$ bir tam sayı olduğundan ve $m + n$ sayısı 2'nin bir katı olduğundan $m + n$ çift sayı olmak zorundadır.

Dikkat ederseniz kanıtımız iki tam sayının toplamının (burada j + k olarak gösterdik) yine bir tam sayı olduğunu söyleyen aksiyoma dayanıyor. Daha karmaşık önermeleri kanıtlarken argümanlarınızı, basit aksiyomlar yerine daha önce kanıtladığınız teoremlere dayandıracaksınız. Matematikçiler, tıpkı yukarıda gördüğünüz gibi, genellikle önermelerin kanıtlarının sonlarına □ ya da ■ gibi bir sembol veya kanıtların son satırına Q.E.D. yazarlar. Q.E.D. "quod erat demonstrandum" şeklinde olan ve "gösterilmek istenen budur" anlamına gelen Latince cümlenin kısaltılışıdır. Bir kanıtın oldukça zarif olduğunu düşündüğümde o kanıtın sonuna ☺ şeklinde bir gülen surat sembolü koyacağım.

Eğer-ise teoremini kanıtladıktan sonra matematikçiler eğer ve ise kısımlarının yer değiştirdiği ters önerme hakkındaki gerçekleri merak etmeden duramazlar. Örneğin yukarıdaki önermenin ters önermesi "Eğer $m + n$ bir çift sayıysa m ve n birer çift sayıdır." şeklindedir. Bu önermenin yanlış olduğu çok açıktır. Bu önermenin yanlış olduğunu gösteren bir *karşı örnek* verin yeter. Bizim önermemiz için

$$1 + 1 = 2$$

örneğini vermemiz yeterli. Çünkü bu örnekte sonuç çift sayı çıkmasına rağmen sayılarımız tek sayıdır.

Bir sonraki teoremimiz *tek sayılar* hakkındadır. Tek sayılar 2 sayısının katı olmayan sayılara denir. Sonuç olarak böyle bir sayıyı 2'ye bölerseniz mutlaka 1 kalanını verir. Cebirsel olarak ifade etmek istersek "bir k tam sayısı için $n = 2k + 1$ şeklinde yazılabilen sayılara tek sayı denir" diyebiliriz.

Teorem: m ve n tek sayıysa mn'de bir tek sayıdır.

Kanıt: m ve n iki tek sayı olsunlar. O zaman belirli k ve j tam sayıları için $m = 2k + 1$ ve $n = 2j + 1$ şeklinde yazılır. Buradan,

$$mn = (2j + 1)\ (2k + 1) = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1$$

çıkar. $2jk + j + k$ bir tam sayı olduğundan mn sayısı bir tam sayının 2 katının 1 fazlasıdır diyebiliriz. Buradan da *mn* sayısının bir tek sayı olduğu sonucuna ulaşırız. □

Peki ya bu önermenin tersi doğru mudur? Yani "*mn* bir tek sayıysa *m* ve *n* tek sayıdır" önermesi doğru mudur? Bu önerme de doğrudur ve bunu *olmayan ergi* kanıtlama yöntemiyle kanıtlayacağız. Olmayan ergi yönteminde sonucun yanlış olduğunu kabul ettiğimizde bize bir sorun yarattığını göstereceğiz. (Örneğin buradaki önermede sonucumuz *m* ve *n* sayılarının tek olmasıdır) Özel olarak, sonucun doğruluğunu reddettiğimizde önceden yaptığımız varsayımlarımızla ilgili bir sorun ortaya çıkacak. Buradan da mantıken önermenin doğru olması gerektiğini söyleyeceğiz.

Teorem: *mn* tek sayıysa *m* ve *n*'de tek sayılardır.

Kanıt: *m* veya *n*'nin (ya da ikisinin birden) çift olduğunu düşünelim. Hangisinin çift olduğunun aslında bir önemi yok. Diyelim ki *m* çift ve bir *j* tam sayısı için $m = 2j$ şeklinde yazılabiliyor. O zaman *mn* çarpımı $2jn$'ye eşit olur ki bu da *mn*'nin çift olduğunu gösterir. Fakat bu sonuç *mn*'nin tek olduğu varsayımımızla çelişir. □

Bir önermenin kendisinin *o*lduğu gibi tersi de doğru ise matematikçiler bu önermeye "ancak ve ancak teoremi" der. Az önce size şu teoremi gösterdik:

Teorem: *m* ve *n* tek sayıdır ancak ve ancak *mn* tek sayıdır.

Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar

Az önce okuduğunuz teoremler size hiç de şaşırtıcı gelmemiştir. Kanıtları da oldukça basittir. Eğlenceli kısım daha az sezgisel şeyleri kanıtladığınızda ortaya çıkar. Şu ana kadar genellikle tam sayılar ile ilgilendik. Artık rasyonel sayılar seviyesine çıkmanın zamanı geldi. *Rasyonel sayılar* kesirli ifade olarak yazılabilen sayılardır. Daha açık olmak gerekirse *a* ve *b* tam sayıları ($b \neq 0$) için *r* sayısı $r = a/b$ şeklinde yazılabiliyorsa *r* sayısına rasyonel sayı denir. Rasyonel sayılar mesela 23/58, -22/7 ve 42 gibi sayıları içerir. Rasyonel olmayan sayılara *irrasyonel* denir. ($\pi = 3.14159 \ldots$ sayısının irrasyonel olduğunu duymuşsunuzdur. 8. Bölüm'de bu konuda daha fazla şey anlatacağız.)

Bir sonraki teoremimiz için kesirlerin nasıl toplandığını hatırlamak yararlı olacak. Paydaları aynı olduğunda kesirleri toplamak çok kolaydır. Mesela,

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}, \quad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1, \quad \frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1.5$$

Durum böyle değilse, kesirleri, paydaları aynı olacak şekilde yeniden yazarız. Mesela,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}=\frac{31}{35}$$

Genel olarak, a/b ve c/d şeklinde olan iki kesri toplamak için bu iki kesri ortak payda olacak şekilde aşağıdaki gibi düzenleyeceğiz:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Şimdi rasyonel sayılar hakkındaki basit bir gerçeği kanıtlamaya hazırız.

Teorem: İki rasyonel sayının ortalaması yine bir rasyonel sayıdır.

Kanıt: x ve y iki rasyonel sayı olsun. O zaman a, b, c, d gibi tam sayılar için $x = a/b$ ve $y = c/d$ olur. x ve y sayılarının ortalaması

$$\frac{x+y}{2}=\frac{a/b+c/d}{2}=\frac{ad+bc}{2bd}$$

şeklinde olur. Bu ortalamanın payı ve paydası birer tam sayıdır. Sonuç olarak, x ve y'nin ortalaması bir rasyonel sayıdır.

Teoremin bize ne söylemek istediğini düşünelim. Teorem herhangi iki rasyonel sayı aldığımızda, bu iki rasyonel sayı birbirlerine ne kadar yakın olursa olsun, aralarında mutlaka bir rasyonel sayı olacağını söylüyor. Tıpkı bir zamanlar antik Yunanlıların bir süreliğine düşündükleri gibi bütün sayıların rasyonel olduğu sonucuna ulaşmak isteyebilirsiniz. Fakat şaşırtıcı bir şekilde bu hiç de doğru değildir. Mesela ondalık açılımı 1.4142… olan $\sqrt{2}$ sayısını ele alalım. $\sqrt{2}$ sayısına kesirlerle yaklaşık değerini bulabilmenin birçok yolu vardır. Mesela $\sqrt{2}$ yaklaşık olarak 10/7 sayısına ya da 1414/1000 sayısına eşittir. Fakat bu kesirlerin hiç birinin karesi 2 sayısını vermez. Belki yeterince iyi bakmamışızdır. Aşağıdaki teorem bize böyle

bir uğraşın boşuna olduğunu söyler. Teoremin kanıtı irrasyonel sayıların teoremlerinin genelinde yaptığımız gibi çelişkiyle çıkacaktır. Aşağıdaki kanıtta her kesrin pay ve paydasının 1 dışında ortak hiçbir çarpanı kalmayana kadar *en sade* şeklinde yazılabileceği gerçeğini kullanacağız.

Teorem: $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır.

Kanıt: $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayalım. O zaman a ve b tam sayıları için

$$\sqrt{2} = a/b$$

olur. Burada a/b kesri en sade şeklinde yazılmış olsun. Eşitliğin her iki tarafının karesini alırsak

$$2 = a^2/\mathrm{b}^2$$

olur. Buna denk olarak,

$$2\mathrm{b}^2 = a^2$$

eşitliğini yazabiliriz. Fakat bu sonuç bize a^2 sayısının çift sayı olduğunu söyler. a^2 çift sayıysa a sayısı da çift sayı olmak zorundadır. (a tek sayı olduğunda a ile a'nın çarpımının tek sayı çıktığını daha önce kanıtlamıştık.) O zaman bir k tam sayısı için $a = 2k$ şeklinde yazılır. Eşitlikte a yerine $2k$ yazdığımızda,

$$(2k)^2 = 2b^2$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan da

$$4k^2 = 2b^2$$

ve sonra

$$2k^2 = b^2$$

eşitliğine ulaşırız. b^2 sayısı çift sayı olduğundan b sayısı da çift sayı olmalıdır. Fakat bir saniye! Az önce hem a'nın hem de b'nin çift sayı olduğunu gösterdik. Bu durum a/b'nin en sade şeklinde yazıldığıyla çelişir. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olması varsayımımız bize sorun çıkardığından $\sqrt{2}$ sayısına irrasyonel demek zorundayız. ☺

Bu kanıtı (kanıtın sonuna koyduğum gülen surattan da anlayacağınız gibi) gerçekten de çok seviyorum. Çünkü sadece saf mantığın gücünü kullanarak bizi oldukça ilginç bir sonuca götürüyor. 12. Bölüm'de görece-

ğimiz üzere irrasyonel sayılar oldukça fazladır. Hatta genellikle rasyonel sayılarla çalışmamıza rağmen sanal olarak neredeyse bütün reel sayılar irrasyoneldir diyebiliriz.

Bir önceki teoremin eğlenceli sonuçlarından birini gösterelim. (Sonuç daha önceki teoremlerin bir sonucu olarak ortaya çıkan teoremlere denir.) Sonucumuz aslında herhangi *a, b, c* pozitif sayıları için

$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

şeklinde olan **kuvvet alma kuralını** kullanıyor. Mesela, bu kurala göre $(5^3)^2 = 5^6$ çıkar ki bu da çok mantıklıdır çünkü

$$\left(5^3\right)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^6$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç: a^b sayısını rasyonel yapan *a* ve *b* irrasyonel sayıları vardır.

Sadece tek bir irrasyonel sayı olan $\sqrt{2}$ sayısını bilerek, bu teoremi şu an kanıtlayacak olmamız oldukça havalı. *a* ve *b*'nin tam olarak hangi sayılar olduğunu söylemeden *a* ve *b*'nin varlığını gösterdiğimiz, az sonra göstereceğimiz kanıta varlık kanıtı denir.

Kanıt: $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu biliyoruz. Şimdi $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısını düşünelim. Bu sayı rasyonel sayı mıdır? Eğer cevap evet ise *a* ve *b* sayılarını $\sqrt{2}$ alırız ve kanıtımız biter. Eğer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısı rasyonel değilse o zaman $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısı elimizde uğraşacak yeni bir irrasyonel sayı olur. $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ve $b = \sqrt{2}$ şeklinde alacak olursak, kuvvet alma kuralından

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

sonucuna ulaşırız. Buradan da *ab*'nin rasyonel olduğu görülür. Kısacası $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısı rasyonel olsun ya da olmasın a^b'yi rasyonel yapan *a* ve *b* değerleri bulabiliriz. ☺

Yukarıdaki gibi varlık kanıtları çoğu zaman akıllıcadır. Fakat bazen okuyucuyu tatmin etmeyebilir. Çünkü size aradığınız bütün bilgiyi ver-

meyebilir. (Bu arada eğer meraklandıysanız söyleyelim $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısı irrasyonel bir sayıdır. Fakat bu sayının irrasyonelliği bu bölümün konusunun ötesindedir.)

İnşa kanıtları istediğiniz bilgiyi size tam olarak veren kanıtlar olarak daha tatmin edicidir. Örneğin, her a/b rasyonel sayısının ondalık açılımının ya sonu olacağını ya da sonsuza kadar tekrar edeceğini (bölme sürecinde b sayısı daha önce böldüğü bir sayıyı önünde sonunda tekrar böldüğü durum) gösterebilirsiniz. Peki bu önermenin tersi doğru mudur? Şüphesiz ki sonu biten ondalık sayılar rasyonel sayılardır. Mesela, 0.12358 = 12358/100000. Sonu devirli olan ondalık sayıları ne yapacağız? Mesela, 0.123123123… ondalık sayısı rasyonel sayı olmak zorunda mıdır? Bu sorunun cevabı "evet"tir ve şimdi size bu ondalık sayının hangi rasyonel sayıya eşit olduğunu gösteren akıllıca bir yol göstereceğiz. Gizemli sayımıza w gibi bir isim verelim. Yani

$$w = 0.123123123\ldots$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafını 1000 ile çarparsak

$$1000w = 123.123123\ldots$$

sonucuna ulaşırız. Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkarırsak,

$$999w = 123$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan da

$$w = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

eşitliğini buluruz.

Şimdi ondalık açılımı en baştan devretmeyen başka bir sayıyı deneyelim. 0.83333… sayısı hangi kesire eşittir?

$$x = 0.83333\ldots$$

olsun. O zaman

$$100x = 83.3333\ldots$$

ve

$$10x = 8.3333\ldots$$

olur. İkinci eşitliği birinciden çıkarırsak sayıların ondalık kısımları aynı olduğu için o kısımlar yok olur. Elimizde

$$90x = (83.3333\ldots) - (8.3333\ldots) = 75$$

eşitliği kalır. Buradan da

$$0.83333\ldots = 75/90 = 5/6$$

eşitliğine ulaşırız.

Bu yöntemi kullanarak bir rasyonel sayının ondalık gösterimi ancak ve ancak ya sonludur ya da devirlidir önermesini inşa ederek kanıtlayabilirsiniz.

$$v = 0.\,123456789101112131415\ldots$$

şeklinde sonu asla bitmeyen ve devirli olmayan sayılar ise irrasyonel sayılardır.

Tümevarımla Kanıt

Pozitif tam sayılarla ilgili teoremleri kanıtlamaya geri dönelim. 1. Bölüm'de

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

olduğunu gözlemlemiş ve buradan ilk n sayının toplamının n^2 olduğunu kanıtlamıştık. Bu sonuca akıllıca bir kombinatorik kanıt kullanarak ulaşmıştık. Satranç tahtasının karelerini iki farklı şekilde saymıştık. Bu sefer o kadar da parlak fikir gerektirmeyen başka bir yol deneyelim. Diyelim ki ilk 10 tek sayının toplamının $(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19) = 10^2$ yani 100 olduğunu ben size söyledim ya da siz gönülden 100 olacağına inanıyorsunuz. Bu önermeyi kabul ederseniz 11. tek sayıyı yani 21 sayısını bu toplama dahil ettiğimizde toplam bu sefer 121 olur ki bu sefer de 11^2 çıkar. Başka bir deyişle 10 terimin toplamının doğruluğu 11 terimin toplamının doğruluğunu sağlar. İşte bu tümevarımla kanıtın ana fikridir. Başlangıçta n'nin doğru olduğu bir önermeyi size vereceğiz (genellikle bu önerme $n = 1$ için doğru olacak). Daha sonra eğer teorem $n = k$ için doğruysa $k + 1$ için de

doğru olduğunu göstereceğiz. Bu sayede teorem n'nin bütün değerleri için doğru olacak. Tümevarımla kanıt yapmak aslında merdiven çıkmak gibidir: Diyelim ki merdivene çıkabildiğinizi size gösterdik. Eğer bir adımı çoktan atmışsanız diğer adımı da atabilirsiniz. Biraz düşününce merdivende bütün adımları atabileceğinize ikna olursunuz.

Örneğin, ilk n tek sayının toplamı için hedefimiz bütün $n \geq 1$ ler için

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

olduğunu göstermektir. İlk tek sayının toplamı 1 tabii ki 1^2 'ye eşittir. Yani önerme $n = 1$ için doğru çıkar. Bir sonraki adımda önermenin ilk k tek sayının toplamının k^2 olduğunu yani

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

olduğunu kabul edip bir sonraki tek sayısının yani $(2k + 1)$'i eşitliğin her iki tarafına ekleyeceğiz. Böylece

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

sonucuna ulaşacağız. Bir başka deyişle ilk k tek sayının toplamının k^2 olması ilk $(k + 1)$ sayının toplamının $(k + 1)^2$ olmasını sağlayacak. Bu yüzden, teorem $n = 1$ için de doğru olduğundan, bütün n değerleri için doğru olmak zorundadır. □

Tümevarım güçlü bir araçtır. Bu kitapta ilk başta baktığımız problem ilk n sayının toplamı olmuştu. Birçok farklı yönden

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

eşitliğini göstermiştik. Bu önerme $n = 1$ için tabii ki doğrudur (1 = 1(2)/2). Önermenin bir k sayısı için doğru olduğunu varsayarsak:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k\,(k + 1)}{2}$$

Eşitliğine ulaşırız. Daha sonra eşitliğin her iki tarafına $(k + 1)$ ekleyerek

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{k\,(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k + 1)\,(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Bu formül n yerine $k + 1$ yazdığımızda çıkan formüldür. Bu sebepten

eğer formül $n = k$ için doğruysa (Burada k herhangi bir pozitif tam sayı olabilir) $n = k + 1$ için de doğru olmaya devam eder. Bu yüzden de eşitlik n'nin bütün pozitif tam sayı değerleri için doğrudur.

Bu bölümde ve daha ileriki bölümlerde tümevarımla ilgili daha fazla örnek göreceğiz. Fakat daha iyi pekiştirmek adına size Dane Camp ve Larry Lesser adında iki "matemüzisyen" tarafından yazılmış olan şarkıyı göstermek istiyorum. Şarkı Bob Dylan'ın "Blowin' in the Wind" parçasıyla aynı tonda söyleniyor.

Bir önermenin doğru olduğunu nasıl anlarsınız?

Bütün ihtimalleri denemeniz imkânsız.

Neden zar zor başlayabildiniz.

Bu durumu çözebilecek elimizde bir araç var mı?

İçinde bulunduğumuz bu ikilemi?

Cevap, arkadaşım, tümevarımı bilmekte!

Cevap tümevarımı bilmekte.

İlk adım olarak başlangıç durumunu bulmalısınız.

Önermenin doğru olduğu

Daha sonra k için doğru olduğunu kabul edip

$k + 1$ için göstermelisiniz!

Bütün önermeler dominolar gibi birer birer düşmeye başlayacak

Böyle güzel bir vuruş nasıl oldu söyleyebilir misin bana dostum?

Cevap, dostum, tümevarımı bilmekte

Cevap tümevarımı bilmekte.

Sana n kere söylemişsem $n + 1$ kere de söylemişimdir

Cevap, dostum, tümevarımı bilmekte!

KOYU MATEMATİK

Bölüm 5'te Fibonacci sayılarıyla ilgili bazı ilişkiler keşfetmiştik. Bu özdeşliklerin bazılarını tümevarım kullanarak şimdi kanıtlayalım.

Teorem: $n \geq 1$ için

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Kanıt (Tümevarım): $n = 1$ olduğunda, önerme bize $F_1 = F_3 - 1$ eşitliği olduğunu söylüyor. Bu eşitlik 1 = 2 – 1 olduğundan doğrudur. Şimdi teoremin $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$$

Eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi eşitlikte her iki tarafa bir sonraki Fibonacci sayısı olan F_{k+1} sayısını ekleyelim. Böylece

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$$

eşitliğine ulaşırız. ☐

Fibonacci sayılarının kareleri toplamının kanıtı da aynı derecede basittir.

Teorem: $n \geq 1$ için

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Kanıt (Tümevarım): $n = 1$ olduğunda $F_1^2 = F_1 F_2$ eşitliği karşımıza çıkar. Bu eşitlik doğrudur çünkü $F_1 = F_2 = 1$'dir. Teoremin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 = F_k F_{k+1}$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafına F_{k+1}^2 terimini ekleyelim.

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \end{aligned}$$

Teoremimiz böylece kanıtlanmış olur. ☐

1. Bölüm'de "küplerin toplamının toplamların karesine eşit olduğunu" görmüştük. Yani

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$$

Fakat bunu kanıtlamaya henüz hazır değildik. Şimdi tümevarım kullanarak oldukça hızlı bir şekilde kanıtlayabiliriz. Genel örüntü bize $n \geq 1$ için,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

olduğunu söyler. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ eşitliğinin doğru olduğunu bildiğimizden aşağıda gösterilen buna denk bir teoremi kanıtlayacağız.

Teorem: $n \geq 1$ için

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Kanıt (Tümevarım): $n = 1$ olduğunda teorem bize $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ eşitliğini verir ve bu eşitlik doğru bir eşitliktir. Teoremin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim yani

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathrm{k}^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

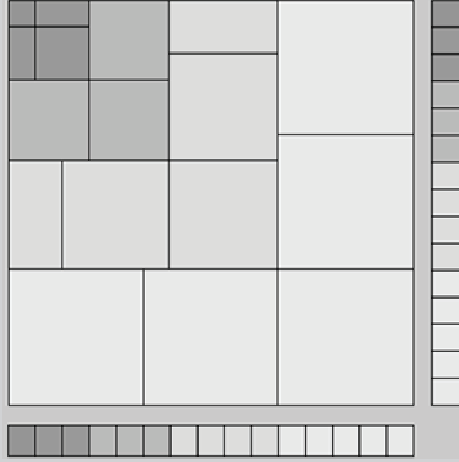
olduğunu varsayalım. Eşitliğin her iki tarafına $(k+1)^3$ eklediğimizde,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4(k+1)}{4}\right) \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \quad . \end{aligned}$$

□

KOYU MATEMATİK

Küplerin toplamı eşitliğinin geometrik kanıtını aşağıda bulabilirsiniz.



Bu şeklin alanını iki farklı şekilde hesaplayalım ve bulduğumuz sonuçları karşılaştıralım. Bir taraftan şekil, bir kare olduğundan bir kenarıının uzunluğu 1 + 2 + 3 + 4 + 5 olduğundan karenin alanı $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$ olur. Diğer yandan sol üst köşeden başlarsak ve diagonal bir şekilde devam edersek önce 1 x 1'lik bir kare görürürüz daha sonra 2 tane 2 x 2'lik kare görürürüz daha sonra 3 tane 3 x 3'lük kare görürürüz daha sonra 4 tane 4 x 4'lük kare görürürüz daha sonra da 5 tane 5 x 5'lik kare görürürüz. Sonuç olarak yukarıdaki şeklin alanı

$$(1 \times 1^2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 3^2) + (4 \times 4^2) + (5 \times 5^2)$$
$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

olur.

Her iki sonucun birbirine eşit olması gerektiğinden,

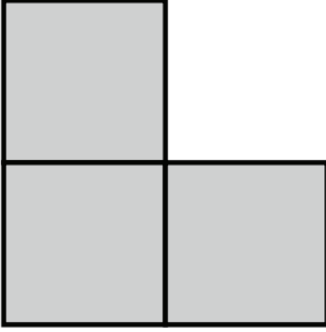
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

eşitliğine ulaşırız.

Bir kenarı $1 + 2 + \cdots + n$ uzunluğunda olan benzer bir şekil

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

sonucunu elde etmek için çizilebilir. ☺



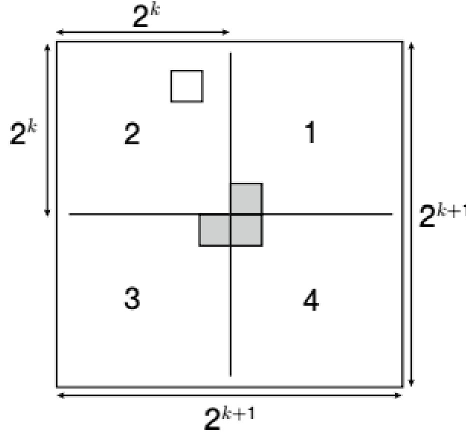
Tümevarımla kanıt toplamsal eşitliklerden daha fazlasını göstermemize de yarar. Tümevarım, genelde "büyük" probleminizin (k + 1 büyüklüğünde) "küçük" (k büyüklüğünde) probleminiz cinsinden yazılabildiğinde sıklıkla işe yarar. Şimdi size bölümün başındaki satranç tahtasını kaplama sorusuyla ilgisi olan, en sevdiğim tümevarımla kanıt örneğini göstereyim. Bu sefer bir şeyin imkânsız olduğunu kanıtlamak yerine bir şeyin her zaman doğru olduğunu göstereceğiz. Bu sefer satranç tahtasını domino taşlarıyla kaplamak yerine satranç tahtasını L şeklinde olan ve 3 kare kaplayan *trominolarla* kaplayacağız.

64 sayısı 3'ün bir katı olmadığı için 8 x 8'lik bir satranç tahtasını sadece trominolarla kaplayamayız. Eğer satranç tahtasındaki herhangi bir kareyi kapatırsak geriye kalan kareleri trominolarla kaplayabileceğimizi iddia ediyoruz. Burada kapattığımız karenin hangi kare olduğunun hiçbir önemi olmayacak. Aslında bu önerme sadece 8 x 8'lik satranç tahtası için değil, aynı zamanda 2 x 2'lik 4 x 4'lük 16 x 16'lık satranç tahtaları için de doğrudur.

Teorem: $n \geq 1$ için $2n$ x $2n$'lik bir satranç tahtasında tek bir kare kapatıldığında diğer kareler trominolarla kaplanabilir. Burada kapatılan karenin yerinin hiçbir önemi yoktur.

Kanıt (Tümevarım): Teorem $n = 1$ için doğrudur. Çünkü tek bir kare kapatıldığında geriye kalan 3 kare 1 tane trominoyla kaplanabilir. Şimdi teoremin $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani $2k$ x $2k$ şeklinde bir satranç tahtasının tek bir karesi kapatıldığında diğer karelerin trominolarla kaplanabildiğini varsayalım. Amacımız bu durumun ($2k$ + 1) x ($2k$ + 1)'lik bir satranç tahtasında da doğru olduğunu göstermek. Önce tahtadaki herhangi bir tek kareyi kapatalım. Sonra aşağıda gösterildiği gibi

tahtayı 4 eşit parçaya bölelim.



Satranç tahtasını trominolarla kaplamak

Kareyi içine alan çeyrek büyüklükteki karenin kenarları 2^k olduğu için bu çeyrek büyüklükteki kare trominolarla kaplanabilir (varsayımımızda $n = k$ olduğu durumu doğru kabul etmiştik). Bir sonraki hamle olarak, karenin merkezine diğer üç çeyrek büyüklükteki kare ile kesişen bir tromino koyacağız. Bu çeyrek büyüklükteki karelerin de kenarları 2^k olduğundan, bir küçük kare dışında bütün alanları trominolarla kaplanabilir. Bu da bize istediğimiz 2^{k+1} kenarı olan bir karenin trominolarla kaplanabileceğini gösterir. ☺

Bu bölümde göstereceğimiz son özdeşliğin bir çok kullanışlı uygulaması var. Tümevarımla kanıt dışında başka yöntemlerle de bu özdeşliğin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Bizi motive etsin diye önce bir soru soralım: $2^0 = 1$'den başlayarak herhangi bir n doğal sayısı için 2^n'ye kadar 2'nin kuvvetlerini toplarsanız nasıl bir sonuç elde edersiniz? Önce 2'nin kuvvetlerini yazalım:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, …

Bu sayıları aşağıdaki gibi toplamaya başlayalım:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 1+2+4 &= 7 \\ 1+2+4+8 &= 15 \\ 1+2+4+8+16 &= 31 \end{aligned}$$

Bir örüntü görebildiniz mi? Her bir toplam 2'nin bir sonraki kuvvetinden bir eksik. Genel formülü için teoremimizi yazabiliriz.

Teorem: $n \geq 1$ için

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

olur.

Kanıt (Tümevarım): Yukarıda söylediğimizi gibi teorem $n = 1$ için doğrudur. (Hatta 2, 3, 4 ve 5 için de doğrudur!) Teoremin n = k için doğru olduğunu varsayalım.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

doğru olsun. Eşitliğin her iki tarafına 2^k eklediğimizde

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k &= (2^k - 1) + 2^k \\ &= 2.\ 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \qquad \square \end{aligned}$$

4 ve 5. bölümlerde bir sayma problemini iki farklı şekilde cevaplayarak birçok ilişkiyi kanıtladık. Az sonra vereceğimiz kombinatorik kanıtı bütün bunların üstünde tutabilirsiniz!

Soru: n oyuncusu olan (forma numaraları 1'den n'ye kadar olan) bir hokey takımı bir konferansa katılmak için heyet seçecektir. En az 1 oyuncunun heyette olması gerekmektedir. Hokey takımı kaç farklı şekilde heyet seçebilir.

Cevap 1: Oyuncuların önünde 2 seçenek vardır. Konferansa katılacaklar ya da katılmayacaklar. Bu yüzden cevap ilk başta 2^n gibi görünebilir. Fakat hiçbir oyuncunun katılmaması durumunu olabilecek tüm durumlardan çıkartmamız gerekir. Bu yüzden cevap $2^n - 1$ çıkar.

Cevap 2: Konferansa katılan oyunculardan forma numarası en büyük olanı ele alalım. 1 numaralı formanın en büyük numara olduğu sadece 1 heyet vardır. 2 numaralı formanın en büyük olduğu 2 heyet vardır: 2 numaralı formalı oyuncu heyette yalnız olabilir ya da yanında 1 numaralı formalı oyuncu da vardır. 3 numaralı formanın en büyük olduğu heyet sayısı 4 olmak zorundadır. (Çünkü 3 numaralı formalı oyuncunun kesin katıldığını biliyorsak 1 ve 2 numaralı oyuncuları önlerinde 2'şer seçenek vardır.) Bu durumu devam ettirdiğimizde n numaralı formanın en bü-

yük olduğu 2^{n-1} tane heyetin olduğunu anlarız. Çünkü eğer n numaralı formalı oyuncunun katıldığını biliyorsak ondan küçük numaralı formaya sahip oyuncuların önlerinde ikişer seçenek vardır: Heyete katılırlar ya da katılmazlar. Bütün durumları topladığımızda $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$ olur.

Cevapların her ikisi de doğru olduğuna göre bu iki sonucun birbirine eşit olması gerekir. Yani

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

olur. ☺

Fakat belki de bu özdeşliği cebir kullanarak kanıtlamak diğer kanıtlardan daha kolaydır. Devirli ondalık sayıları kesre nasıl çevireceğimizle ilgili olan yöntemi hatırlatan bir yöntem kullanacağız:

Cebirsel Kanıt:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$ olsun. Eşitliğin her iki tarafını 2 ile çarparsak

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$$

olur. İkinci denklemden birinci denklemi çıkardığımızda neredeyse bütün terimler birbirini götürür, elimizde sadece S'nin son terimi ile 2S'nin ilk terimi kalır. Bu yüzden

$$S = 2S - S = 2^{n-1}$$

sonucu çıkar. □

Az önce kanıtladığımız teorem sayıların ikili sistemde gösterimi için önem taşıyor. Bu sistem sayesinde bilgisayarlar sayıları depolar ve işlerler. İkili sistemin ardındaki fikir her sayının yalnızca tek bir şekilde 2'nin kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılmasından gelmektedir. Örneğin,

$$83 = 64 + 16 + 2 + 1.$$

Bu toplamı, toplamın sahip olduğu 2'nin kuvvetleri yerine 1 yazarak ve sahip olmadığı 2'nin kuvvetleri yerine 0 yazarak ikili sistemde yazacağız. Örneğimizde,

$$83 = (1.\ 64) + (0.\ 32) + (1.\ 16) + (0.\ 8) + (0.\ 4) + (1.\ 2) + (1.\ 1)$$

toplamı var. Dolayısıyla 83 sayısının ikili sistemde yazılışı

$$83 = (1010011)_2$$

olur. Bütün pozitif sayıların bu şekilde yazılabileceğini nereden biliyoruz? Diyelim ki 1'den 99'a kadar olan bütün sayılar 2'nin kuvvetlerinin topla-

mı olarak tek bir şekilde yazılabilsin. 100 sayısının böyle tek bir şekilde yazılabileceğini nereden bileceğiz? 2'nin 100 sayısından küçük en büyük kuvvetini alalım. (Yani 64 sayısını alalım.) (Hesabımıza 64 sayısını dahil etmeli miyiz? Evet çünkü eğer sadece 1, 2, 4, 16, 32 sayılarını seçseydik bu sayıların toplamı 63 ederdi ve bu toplam 100 sayısından küçük olurdu.) 64 sayısını bir kez kullanınca geriye kalan 36 sayısını elde etmek için 2'nin kuvvetlerini bulmalıyız. Varsayımımıza göre 36 sayısı 2'nin kuvvetlerinin toplamı olarak tek bir şekilde yazılabiliyor. Bu da bize 100 sayısını tek bir şekilde 2'nin kuvvetlerinin toplamı olarak yazabileceğimizi gösterir. (36 sayısını nasıl yazarız? Yukarıdaki argümanı kullanarak, 2'nin alabileceğimiz en büyük kuvvetini alırız ve yönteme devam ederiz. Bu sayede 36 = 32 + 4 ve 100 = 64 + 32 + 4 olur. Bu toplamın ikili sistemde gösterimi $(1100100)_2$ olur.) Bu argümanı genelleştirerek (güçlü tümevarım yöntemi denilen bir yöntem kullanarak) her pozitif sayının ikili sistemde tek bir şekilde gösterimi olduğunu gösterebiliriz.

Asal Sayılar

Geçen bölümde her pozitif tam sayının yalnızca tek bir şekilde 2'nin kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılabileceğini göstermiştik. Bir anlamda 2'nin kuvvetlerini toplama işlemi altında her sayının yapı taşı olarak görebilirsiniz. Bu bölümde çarpma işlemi altında asal sayıların yine benzer bir görevi olduğunu göreceğiz: Her pozitif sayı yalnızca tek bir şekilde asalların çarpımı olarak yazılır. Fakat 2'nin kuvvetlerinde farkettiğimiz matematiksel sürprizlerden farklı olarak asal sayılar biraz daha zorlu çıkacak. Hala asal sayıların birçok özelliğini bilmiyoruz.

Kendisi ve 1 dışında pozitif böleni olmayan pozitif tam sayılara asal sayı denir. Şimdi size birkaç asal sayı örneği verelim:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, …

1 sayısı asal sayı olarak alınmaz çünkü sadece tek bir böleni vardır, o da kendisidir. (1 sayısının asal sayı olarak alınmamasının daha önemli bir nedeni vardır. Bu nedenden biraz sonra bahsedeceğiz.) 2 sayısının tek çift asal sayı olduğunu fark ettiniz mi? Bazıları bu özelliği yüzünden 2 sayısının tek olduğunu söyler!

Üç veya daha fazla pozitif tam sayı böleni olan sayılara bileşik sayı denir. Bu sayılar kendilerinden daha küçük sayılara parçalanabilirler. Bileşik sayılara örnek olarak

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, …

Mesela 4 sayısının tam tamına üç böleni vardır: 1, 2, 4 sayıları. 6 sayısının dört böleni vardır: 1, 2, 3 ve 6 sayıları. 1 sayısını bileşik sayıların arasına da koyamayız. Matematikçiler 1 sayısına birim der. Bu sayı her pozitif tam sayıyı böler. Bileşik sayılar asalların çarpımı şeklinde yazılabilirler. Mesela 120 sayısını asal çarpanlarına ayıralım. 120 = 6 x 20 ile başlayalım. 6 ve 20 sayıları asal değildir. Fakat asal çarpanlarına ayrılabilirler. 6 = 2 x 3 ve 20 = 2 x 2 x 5. Bu sebepten

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3\, 3^1\, 5^1$$

olur. İlginç bir şekilde sayımızı çarpanlarına ayırırken nereden başlarsak başlayalım, sayının asal çarpanlarına ayrılmış hali hep aynı olur. Bu durum, 1'den büyük her tam sayının sadece tek bir şekilde asal çarpanlarına ayrılabileceğini söyleyen **Aritmetiğin Temel Teoremi'**nden kaynaklanır.

Bu arada 1 sayısının asal sayı olarak kabul edilmemesinin asıl sebebi bu teoremdir. Çünkü eğer 1 sayısı asal sayı olarak kabul edilirse bu teorem doğru değildir. Örneğin 12 sayısı 2 x 2 x 3 şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. Fakat eğer 1 sayısını asal kabul edersek 1 x 1 x 2 x 2 x 3 şeklinde de asal çarpanlarına ayrılabilir. Bu yüzden teoremin söylediği sadece tek bir şekilde asal çarpanlarına yazılma özelliği ortadan kalkar.

Bir sayının çarpanlarına nasıl ayrıldığını bilirseniz o sayı hakkında birçok bilgiye sahip olursunuz. Çocukken en sevdiğim sayı 9'du. Büyüdükçe sevdiğim sayılar da büyümeye başladı ve giderek daha karmaşıklaştılar (mesela $\pi = 3.14159\ldots$, $\phi = 1.618\ldots$, $e = 2.7182\ldots$ ve herhangi bir ondalık açılımı olmayan ve 10. Bölüm'de bahsedeceğimiz i sayısı). Bir süreliğine irrasyonel sayılarla ilgilenmeden önce en sevdiğim sayı 2520 idi. Bu sayı 1'den 10'a kadar bütün sayılara bölünebilen en küçük sayıdır. Asal çarpanlarına ayrılmış hali

$$2520 = 2^3\, 3^2\, 5^1\, 7^1$$

şeklindedir.

Bir sayının asal çarpanlarına ayrılmış halini bilirseniz, sayının kaç tane pozitif böleni olduğunu da hemencecik bilirsiniz. Mesela, 2520 sayısının

herhangi bir böleni $2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d$ formunda olmak zorundadır. Burada *a* harfi 0, 1, 2 veya 3 (4 seçim), *b* harfi 0, 1 veya 2 (3 seçim), *c* harfi 0 veya 1 (2 seçim) *d* harfi 0 veya 1 (2 seçim) olabilir. Bu sayede çarpma kuralını kullanarak 2520 sayısının 4 x 3 x 2 x 2 = 48 böleni olduğunu söyleyebiliriz.

KOYU MATEMATİK

Aritmetiğin temel teoreminin kanıtı, herhangi bir sayılar teorisi kitabını ilk bölümünde kanıtlanan, asal sayılarla ilgili en temel özelliklerden birini kullanır. Eğer p bir asal sayıysa ve p iki sayının çarpımını bölüyorsa, p sayısı bu iki sayıdan en az birini bölüyordur. Mesela

999999 = 333 x 3003

sayısı 11'in bir katıdır. Yani 11 sayısı 333 veya 3003 sayılarından en az birini bölmek zorundadır (3003 = 11 x 273). Bu özellik asal olmayan sayılarda her zaman doğru değildir. Mesela 60 = 10 x 6 sayısı 4'e bölünür. Fakat 4 sayısı ne 10'u ne de 6'yı tam bölebilir.

Pozitif bir sayının asal çarpanlarına tek bir şekilde ayrılabileceğini kanıtlamak için böyle olmadığını varsayacağız. Yani sayıların en az iki farklı şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olduğunu varsayacağız. Diyelim ki bu sayıların en küçüğü N olsun. Yani

$$p_1\, p_2 \ldots p_r = \mathrm{N} = q_1\, q_2 \ldots q_s$$

olsun. Burada q_i ve p_j'ler asal sayıları gösterir. N sayısı p_1 asal sayısının bir katı olduğuna göre p_1 sayısı q_i asallarından birini bölmek zorundadır. Gösterim kolaylığı açısından p_1'in q_1'i böldüğünü varsayalım. Fakat q_1 asal sayı olduğundan $p_1 = q_1$ eşitliği sağlanmaktadır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını p_1'e böldüğümüzde

$$p_2 \ldots p_r = \frac{N}{p_1} = q_2 \ldots q_s$$

eşitliğini elde ederiz. Fakat bu eşitlikte $\frac{N}{p_1}$ sayısının iki farklı şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olduğu görülür. Bu sonuç ise N'nin en küçük olmasıyla çelişir. □

KOYU MATEMATİK

Yeri gelmişken söylememek olmaz, sayıların tek bir şekilde asal çarpanlarına ayrılmadığı sayı sistemleri de vardır. Mesela Mars'ta Marslıların iki kafası vardır ve bu yüzden sadece çift sayılar kullanırlar,

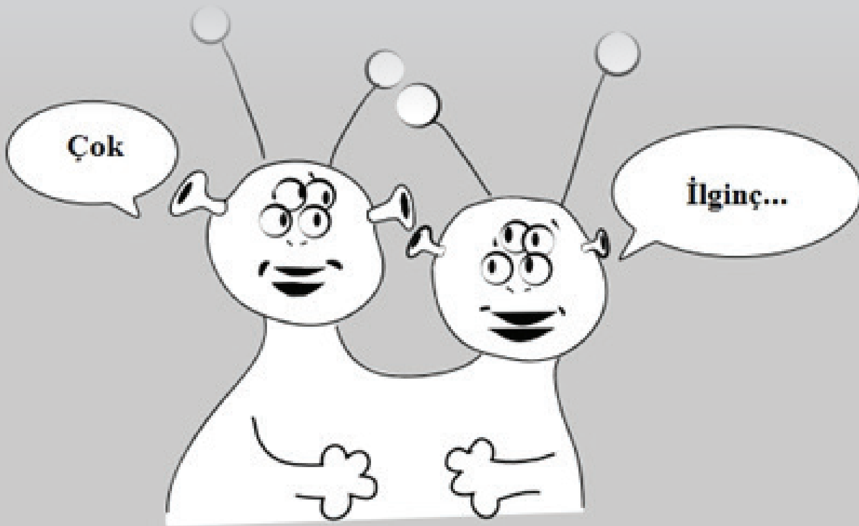
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, …

Bu Marslı sistemde 6 veya 10 gibi sayılar asal olarak kabul edilir. Çünkü kendilerinden önce gelen çift sayılara bölünemezler. Bu sistemde asal sayılar ve asal olmayan sayılar art arda gelir.

4'ün katı olan bütün sayılar asal değildir (çünkü $4k = 2 \times 2k$) diğer bütün çift sayılar (6, 10, 14, 18, …) ise kendilerinden önce gelen sayılara bölünemedikleri için asaldır. Şimdi 180 sayısını düşünelim:

$$6 \times 30 = 180 = 10 \times 18$$

Marslı sayı sistemine göre 180 sayısını iki farklı şekilde asal çarpanlarına ayrılmış hali vardır. Kısacası bu sayı sistemini kullanan gezegenlerde tek bir şekilde asal çarpanlara ayrılma durumu yoktur.



1'den 100'e kadar olan sayılar arasında 25 tane asal sayı vardır. Bir sonraki 100 sayının arasında ise 21 asal sayı vardır. Bir sonraki 100 sayıda ise 16. Sayılar büyüdükçe asal sayılar giderek seyrekleşir (fakat tahmin edilebilir bir şekilde seyrekleşmezler. Mesela 300 ile 400 arasında 16 asal sayı varken 400 ile 500 arasında 17 asal sayı vardır.). 1000000 ile 1000100

sayıları arasında sadece 6 tane asal vardır. Aslında sayıların giderek büyümesiyle asalların seyrekleşmesi mantıklıdır, çünkü sayılar büyüdükçe kendilerinden önce gelen sayılardan birine bölünebilme ihtimalleri artar.

İçinde hiç asal barındırmayan 100'lü sayı gruplarının varlığını kanıtlayabiliriz. İçinde hiç asal sayı barındırmayan 1000'li, 1milyonlu sayı grupları (Grup genişliğini istediğiniz kadar genişletebilirsiniz) bile vardır. Size hemen 99 tane ardışık bileşik sayı vererek ikna etmeye çalışayım.

$$100! + 2,\ 100! + 3,\ 100! + 4,\ \ldots,\ 100! + 100$$

$100! = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 100$ olduğundan 2'den 100'e kadar bütün sayılar 100! sayısını böler. Şimdi 100! + 53 sayısını düşünün. 53 sayısı 100! sayısını böldüğünden 100! + 53 sayısını da böler. Aynı argüman $2 \leq k \leq 100$ eşitsizliğini sağlayan bütün k tam sayıları için $100! + k$ sayıları asal değildir.

KOYU MATEMATİK

Dikkat ederseniz argümanımız 100!+ 1 sayısının asal olup olmadığıyla ilgili bir şey söylemiyor. Fakat bunu da bulabiliriz. Wilson Teoremi'ne göre n bir asal sayıysa $(n - 1)! + 1$ sayısını böler. Wilson Teoremi bu önermenin tersinin de doğru olduğunu söyler. Yani eğer n sayısı $(n - 1)! + 1$ sayısını bölebiliyorsa n bir asal sayıdır. N yerine küçük sayılar koyarak teoremin doğru olup olmadığını anlamaya çalışalım: 1! + 1 = 2 sayısı 2'nin bir katıdır; 2! + 1 = 3 sayısı 3'ün bir katıdır; 3! + 1 = 7 sayısı 4'ün bir katı değildir; 4! + 1 = 25 sayısı 5'in bir katıdır; 5! + 1 = 121 sayısı 6'nın bir katı değildir; 6! + 1 = 721 sayısı 7'nin bir katıdır ve böyle devam edebiliriz. Sonuç olarak 101 bir asal sayı olduğundan Wilson Teoremi'ne göre 100! + 1 sayısı 101'in bir katıdır ve bu yüzden bu sayı asal olmayan bir sayıdır. Bu yüzden 100! sayısından 100! + 100 sayısına kadar olan sayılar asal değildir.

Asal sayıların büyük sayılar arasında gittikçe seyrelmesi aklımıza bir soru getirir. Acaba bir yerden sonra asal sayılar bitecek mi? Öklid'in 2000 yıl önce bize gösterdiği üzere böyle bir şey mümkün değil. Fakat Öklid böyle söyledi diye de hemen inanmayın. Kanıtına bakıp eğlenmenize bakın.

Teorem: Sonsuz sayıda asal sayı vardır.

Kanıt: Asal sayıların sonlu olduğunu varsayalım. En büyük asal sayıya P diyelim ve P! + 1 sayısını düşünelim. P! sayısı 2'den P'ye kadar

olan bütün sayılara bölünebildiği için P! + 1 sayısı bu sayıların hiç birine bölünemez. O zaman P! + 1 sayısı P'den büyük bir asal sayıya bölünmek zorundadır. Fakat bu durum P'nin en büyük asal olmasıyla çelişir. □

En büyük asal sayıyı bulmak söz konusu olmasa bile bu durum matematikçileri ve bilgisayar bilimcilerini bulabilecekleri en büyük asal sayıyı aramaktan alıkoyamamıştır. Bu kitap yazılırken bilinen en büyük asal sayı 17425170 basamaklı bir sayıydı. Bu sayıyı açık bir şekilde yazmaya çalıştığınızda bu kitap kalınlığında 100 kitap kadar yazmanız gerekir. Fakat hala daha bu sayıyı tek bir satıra yazabiliyoruz:

$$2^{57885161} - 1.$$

Bu sayının bu kadar basitçe yazılabilmesinin nedeni $2^n - 1$ veya $2^n + 1$ formunda olan sayıların asal olup olmadığını anlamamız için etkili yöntemlerimizin olmasıdır.

KOYU MATEMATİK

Büyük matematikçi Pierre de Fermat, $p \neq 2$ için p bir asal sayı olmak üzere $2^{p-1} - 1$ sayısının p'nin bir katı olduğunu kanıtlamıştır. Bu önermeyi ilk birkaç asal sayıyı deneyerek test edelim. 3, 5, 7, 11 asal sayıları için $2^2 - 1 = 3$ sayısı 3'ün bir katıdır. $2^4 - 1 = 15$ sayısı 5'in bir katıdır; $2^6 - 1 = 63$ sayısı 7'nin bir katıdır; $2^{10} - 1 = 1023$ sayısı 11'in bir katıdır. Asal olmayan sayılar için n çift sayıysa $2^{n-1} - 1$ tek sayı olmalıdır. Yani n'nin bir katı olamaz. 9, 15 ve 21 gibi ilk birkaç asal olmayan tek sayıya bakacak olursak, $2^8 - 1 = 255$ sayısı 9'un bir katı değildir. $2^{14} - 1 = 16383$ sayısı 15'in bir katı değildir ve $2^{20} - 1 = 1048575$ sayısı 21'in bir katı değildir (3'ün katı bile değildir). Fermat Teoremi'nin bir sonucu olarak büyük N sayısı için $2^{N-1} - 1$ sayısı N'nin bir katı değilse N sayısının çarpanlarına bakmadan N sayısının asal olmadığını söyleyebiliriz. Fakat Fermat Teoremi'nin tersi doğru değildir. Asal olmayan fakat asal gibi davranan sayılar (Biz bu sayılara asalımsı sayılar diyoruz.) vardır. Verilebilecek en küçük örnek 341 = 11 x 31 sayısıdır. $2^{340} - 1$ sayısı 341'in bir katı olmasına rağmen asal değildir. Asalımsıların oldukça seyrek olduğu bilinmesine rağmen sonsuz sayıdadırlar. Bu sayıları ayıklamak için belli testler vardır.

Asal sayıların özellikle bilgisayar bilimleri olmak üzere birçok uygulama alanı vardır. Asal sayılar neredeyse bütün şifreleme algoritmalarının kalbinde bulunur. İnternetten finansal işlem yapabildiğimiz açık anahtarlı şifreleme de bu algoritmaların içindedir. Bu algoritmaların birçoğu bir sayının asal olup olmadığını test etmek için görece hızlı yöntemler olduğunu fakat büyük sayıları asal çarpanlarına hızlıca ayıramayacağımız gerçeğine dayanır. Örneğin, iki tane 1000 basamaklı asal sayıyı çarpıp 2000 basamaklı bir sayı bulduğumda bir insanın ya da bilgisayarın (günün birinde kuantum bilgisayarlar yapılabilirse durumlar değişir) orijinal iki asal sayıyı bulması imkansıza yakındır. Büyük sayıları asal çarpanlarına ayıramayacağımız gerçeğine dayanan kodlar (RSA yöntemi gibi) oldukça güvenli kodlar olarak görülür.

Binlerce yıldır insanlar asal sayılardan heyecan duymuşlardır. Antik Yunan'da eğer bir sayı, bölenlerinin (kendisi hariç) toplamına eşitse o sayıya mükemmel sayı denirdi. Mesela 6 mükemmel sayıdır. Çünkü 1, 2 ve 3 sayılarına bölünür ve bu sayıların toplamı 6 olur. Bir sonraki mükemmel sayı 28'dir. 1, 2, 4, 7 ve 14 sayıları bu sayıyı böler ve bölenlerin toplamı 28'i verir. Bundan sonra gelen mükemmel sayılar 496 ve 8128 sayılarıdır. Burada bir örüntü var mı? Şimdi bu sayıları asal çarpanlarına ayıralım.

$$6 = 2 \times 3$$

$$28 = 4 \times 7$$

$$496 = 16 \times 31$$

$$8128 = 64 \times 127$$

Örüntüyü görebildiniz mi? İlk sayılar hep 2'nin bir kuvveti oluyor. İkinci sayılar ise ilk sayıların 2 katının 1 eksiği oluyor ve hep asal sayı çıkıyor. (8 x 15 ya da 32 x 63 gibi çarpımları listede bu yüzden göremediniz. Çünkü 15 ve 63 sayıları asal sayı değil.) Elimizdeki örüntüyü özetlemek adına bir teorem haline getirelim.

Teorem: $2^n - 1$ asal ise $(2^{n-1}) \times (2^n - 1)$ mükemmel sayıdır.

KOYU MATEMATİK

Kanıt: $p = 2^n - 1$ asal olsun. 2^{n-1} p'nin mükemmel sayı olduğunu göstermek istiyoruz. $2^{n-1}\,p$ sayısının kendisine eşit olmayan bölenleri nelerdir? p böleni kullanmayan bölenler basitçe, 1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1}'dir. Bütün bu bölenlerin toplamı $2^n - 1 = p$ çıkar. $2^{n-1}\,p$ böleni dışındaki diğer bölenler p böleninden faydalanır. Yani bu bölenlerin toplamı

$$p\,(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-2}) = p(2^{n-1} - 1)$$

olur. Yani bölenlerin toplamı

$$p + p(2^{n-1} - 1) = p(1 + (2^{n-1} - 1)) = 2^{n-1}p$$

olur. ☐

Büyük matematikçi Leonard Euler (1707-1783) bütün çift mükemmel sayıların bu formda olduğunu kanıtlamıştır. Bu kitap yazılırken 48 tane mükemmel sayı bulunmuştu. Hepsi çift sayıydı. Peki hiç mükemmel tek sayı var mı? Şu ana kadar kimse bu sorunun yanıtını bilmiyor. Eğer mükemmel tek sayı varsa 300 basamaktan fazla basamaklı olması gerektiği biliniyor. Şu ana kadar kimse mükemmel tek sayıların olmasının imkânsız olduğunu kanıtlayamadı.

Kolayca anlatılabilir, asal sayılarla ilgili olan, çözülemememiş birçok problem var. Daha önceden Fibonacci asal sayılarının sonsuz tane olup olmadığını bilmediğimizi söylemiştik. (Fibonacci sayıları arasında sadece iki tam kare sayı (1 ve 144) ve iki tam küp (1 ve 8) vardı.) Çözülemeyen bir başka problem ise 2'den büyük bütün çift sayıların iki asalın toplamı olduğunu söyleyen *Goldbach Sanısı*'dır. Şu ana kadar kimse bu sanıyı kanıtlayamamıştır. Fakat eğer bir karşı örnek varsa o örneğin en az 19 basamağı olması gerektiği kanıtlanmıştır. (Son zamanlarda benzer bir problem üzerinde yeni bir atılım yapılmıştır. 2013'te Harald Helfgott 7'den büyük bütün tek sayıların en fazla 3 asal sayının toplamı olduğunu kanıtlamıştır.) Son olarak bir tanım daha yapacağız: Farkları 2 çıkan asal sayılara *ikiz asallar* denir. İkiz asallara örnek olarak 3 ve 5, 5 ve 7, 11 ve 13, 17 ve 19, 29 ve 31 verilebilir. 3, 5 ve 7 sayılarına neden "asal üçlü" denildiğini görebiliyor musunuz? (Gustav Dirichlet'in teoreminin özel bir durumu olarak) Sonu 1 (ya da 3, 7 veya 9) ile biten sonsuz tane asal sayı olduğu

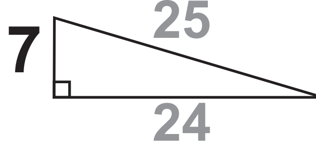
bilinmesine rağmen ikiz asalların sonsuz tane olması sorusu hala açık bir soru olarak kalmaktadır.

Bu bölümü ilginç bir sav ile bitirelim. Umarım savdaki önermeye siz de katılırsınız.

Sav: Bütün pozitif tam sayılar ilginçtir!

Kanıt?: İlk tam sayıların ilginç olduğuna dair karşı çıkabileceğinizi sanmıyorum. Mesela 1 ilk pozitif tam sayıdır, 2 ilk çift tam sayıdır, 3 ilk tek asal sayıdır, 4 sayısı (yazılışı D - Ö - R - T) harf sayısı ile sayı değeri aynı olan ilk sayıdır. Şimdi bütün pozitif sayıların ilginç olmadığını varsayalım. Bu sayılar arasında en küçüğünü alalım ve bu sayıya N diyelim. N sayısı ilginç olmayan ilk sayı olsun. Fakat bu özellik N sayısını ilginç yapar. Böylece ilginç olmayan pozitif tam sayı olamayacağını göstermiş olduk. ☺

YEDİNCİ **BÖLÜM**

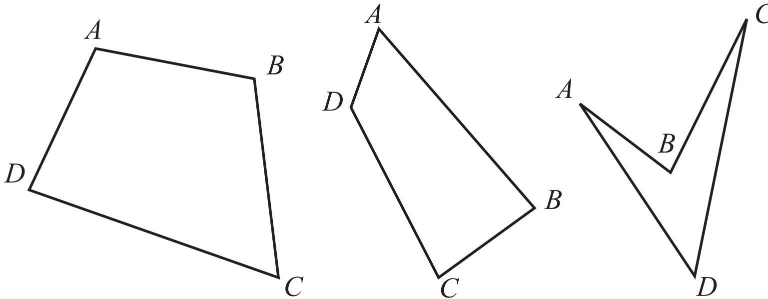


Geometrinin Sihri

Birkaç Geometri Süprizi

Sihirbazlık numarası gibi sunulabilecek bir geometri problemi ile başlayalım. Müsvedde bir kağıt üzerine aşağıdaki adımları takip edin.

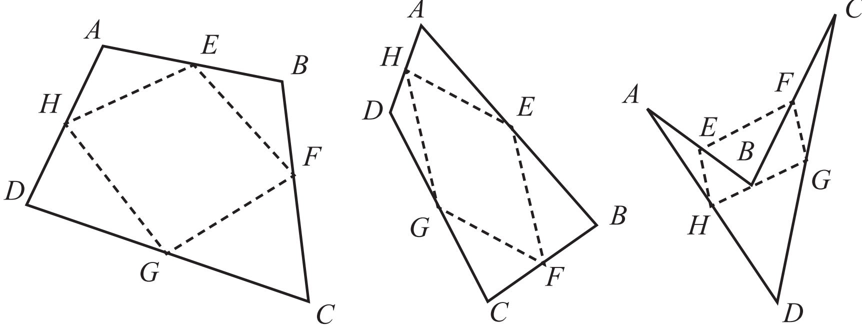
1. Adım. Dört kenarlı bir şekil çizin, kenarların hiçbiri birbirini kesmesin. (Buna *dörtgen* denir.) Köşelerine saat yönünde ilerleyerek *A, B, C* ve *D* isimlerini verin. (Aşağıda birkaç örnek var.)



Üç tane rastgele çizilmiş dörtgen

2. Adım. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ve $\overline{DA}$ kenarlarının orta noktalarını sırasıyla *E*, *F*, *G* ve *H* diye isimlendirin.

3.Adım. Bu orta noktaları kullanarak *EFGH* dörtgenini oluşturun, aşağıdaki şekillerde olduğu gibi.



Bir dörtgenin orta noktalarını birleştirmek her zaman bir paralelkenar oluşturur

İster inanın ister inanmayın, *EFGH* dörtgeninin bir paralelkenar olması garantidir. Başka bir deyişle, $\overline{EF}$ kenarı $\overline{GH}$ kenarına paralel olur ve $\overline{FG}$ kenarı da $\overline{HE}$ kenarına paralel olur. (Aynı zamanda $\overline{EF}$ ve $\overline{GH}$ aynı uzunlukta olacaklardır, aynı şekilde $\overline{FG}$ ve $\overline{HE}$ kenarları da.) Bu durum yukarıdaki örneklerde gösterilmiştir, ama siz de kendi örneklerinizi çizseniz iyi olur.

Geometri bunun gibi süprizlerle doludur. En basit varsayımlara temel mantıksal argümanları uygulamak genellikle güzel sonuçlara ulaştırır. Geometrik sezgilerinizi sınamak için kısa bir test yapalım. Bu soruların bazılarının cevapları oldukça sezgisel ama bazı cevaplar sizi şaşırtabilir hem de iyi derecede geometri bilseniz bile.

Soru 1: Bir çiftçi çevresi 52 metre olacak biçimde dikdörtgen bir çit inşa etmek istiyor. Çevrelediği alanı maksimize etmek adına bu dikdörtgenin boyutları nasıl olmalıdır?

A) Bir kare (her bir kenarı 13 metre olan).

B) Altın oran olan 1.618’e yakın ölçülerde (mesela 16 metreye 10 metre boyutlarında).

C) Genişliği mümkün olduğunca fazla olmalı (yaklaşık 26 metreye yaklaşık 2 metre gibi).

D) Yukardaki bütün cevaplar aynı alanı verecektir.

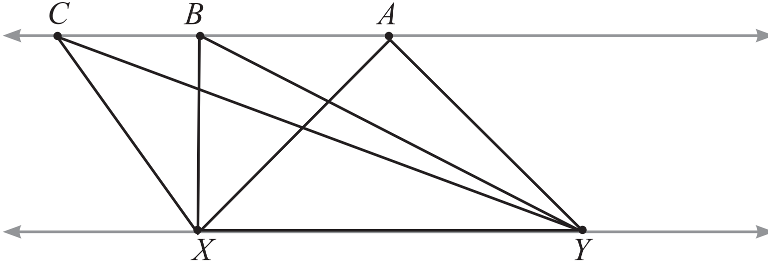
Soru 2: Aşağıdaki iki paralel doğruyu düşünelim, alttaki doğru üzerinde *X* ve *Y* noktaları alalım. Üstteki doğru üzerinde öyle bir nokta seçmek istiyoruz ki, *X* ve *Y* seçtiğimiz bu noktanın oluşturacağı üçgenin çevresi olabilecek en küçük boyutta olsun. Üstteki nokta nasıl seçilmelidir?

A) *A* noktası (*X* ve *Y* noktalarının ortasının tam üstü).

B) *B* noktası (öyle ki *B*, *X* ve *Y* noktaları bir dik üçgen oluşturuyor).

C) *X* ve *Y* noktalarından olabildiği kadar uzakta (*C* noktası gibi).

D) Farketmez. Bütün üçgenlerin çevresi aynı olacaktır.



Üstteki doğruda seçilecek hangi nokta (X ve Y noktaları ile beraber) en küçük çevreye sahip üçgeni verir? Hangi nokta en büyük alanı verir?

Soru 3: Yukarıdaki aynı şekilde, üstteki doğrudaki hangi *P* noktası seçilmeli ki, *X*, *Y* ve *P* noktasının oluşturduğu üçgen en büyük alana sahip olsun?

A) *A* noktası.

B) *B* noktası.

C) *X* ve *Y* noktalarından olabildiğince uzakta.

D) Farketmez. Her üçgen aynı alana sahip olacaktır.

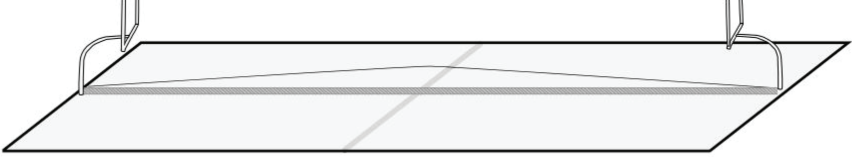
Soru 4: Bir Amerikan futbolu sahasında kaleden kaleye uzaklık 360 birimdir (1 birim yaklaşık 0,3 metre ediyor). 360 birim uzunluğundaki bir ip bir kaleden diğerine geriliyor ve ipe 1 birim daha ekleniyor. Sahanın tam ortasından bu ipi yukarı doğru ne kadar yükseğe kaldırabiliriz?

A) Yerden yükseliği bir birimden daha az olur.

B) Altından sürünerek geçebileceğimiz kadar olur.

C) Altından yürüyerek geçebileceğimiz kadar olur.

D) Altından bir kamyon geçebilecek kadar olur.



Uzunluğu 361 birim olan ip aralarındaki uzunluk 360 birim olan iki kale arasına geriliyor. İpi sahanın ortasından ne kadar yukarı kaldırabiliriz?

Soruların cevaplarını hemen aşağıda bulabilirsiniz. Bana kalırsa, ilk iki sorunun cevabı oldukça sezgisel, ama diğer iki sorunun cevabı birçok kişiyi şaşırtabilir. Bütün cevaplar ilerleyen sayfalarda açıklanacaktır.

Cevap 1: A. Verilen herhangi bir uzunluk için, dikdörtgenin alanın maksimize etmek için bütün kenarlarının uzunluklarını aynı almalısınız. Yani, en uygun şekil bir karedir.

Cevap 2: A. A noktasını X ve Y noktalarının orta noktasının tam üstünde seçmek olabilecek en küçük çevreye sahip XAY üçgenini oluşturacaktır.

Cevap 3: D. Bütün üçgenlerin alanı aynı olur.

Cevap 4: D. Sahanın orta noktasından bu ip 4 metreden biraz daha yükseğe kaldırılabilir, bu uzunluğun altına da çoğu kamyon sığacaktır.

İlk cevabı temel cebir bilgisi kullanarak açıklayabiliriz. Alt ve üst uzunlukları b olan sağ ve sol uzunlukları da h olan bir dikdörtgenin çevre uzunluğu $2b + 2h$ olur, bu da bütün dört kenarın uzunluklarının toplamıdır. Alan bu dikdörtgenin içine sığabilecek miktarı ölçer, o da bh çarpımıdır. (Alan hakkında daha sonra daha detaylı konuşacağız) Çevre toplam 52 metre olması gerektiğinden şunu elde ederiz; $2b + 2h = 52$ ya da eşdeğer olarak $b + h = 26$.

Ve $h = 26 - b$ olduğu için, maksimize ettiğimiz alanı şuna eşit olacaktır:

$$b\,(26 - b) = 26b - b^2$$

Bu miktarı b sayısının hangi değeri maksimize eder? Bunu kalkülüs kullanarak çözmenin kolay bir yolunu 11. Bölüm'de göreceğiz. Ancak bunu 2. Bölüm'de gördüğümüz tamkareye tamamlama metotu ile de bulabiliriz. Bu değer kenar uzunluğu seçildiği zaman dikdörtgenin alanını verir:

$$26b - b^2 = 169 - (b^2 - 26b + 169) = 169 - (b - 13)^2$$

$b = 13$ olduğunda dikdörtgenimizin alanı $169 - 0^2 = 169$. $b \neq 13$ olduğunda ise alanımız şudur:

$$169 - (\textit{sıfırdan farklı bir sayı})^2.$$

Burada 169 sayısından pozitif bir sayı çıkardığımız için bu değer her zaman 169'dan küçük olacaktır. Sonuç olarak, dikdörtgenin alanı $b = 13$ ve $h = 26 - 13 = 13$ olduğunda maksimum değerini alır. Geometri hakkında muhteşem olan şeylerden biri de çiftçinin toplam 52 metre çite sahip olmasının pek bir önemi olmamasıdır. Verilen bir p çevresine sahip olan bir dikdörtgenin alanını maksimize etmek için, aynı teknikleri kullanarak en uygun şeklin bir kare olduğunu kanıtlayabiliriz ve tabii ki herbir kenarın uzunluğu $p/4$ olur.

Diğer problemleri açıklayabilmek için önce ilk bakışta paradoks gibi gözüken birtakım olgulara bakıp ve sonra biraz da klasik geometri incelemesi yapacağız. Neden bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir? Pisagor teoremi ne anlatıyor? İki üçgenin aynı şekle sahip olup olmadığından nasıl emin olabiliriz ve bu neden herhangi bir önem teşkil etsin?

Klasik Geometri

Geometri branşı antik Yunan medeniyetine kadar uzanır. "Geometri" ismi "yeryüzü" anlamına gelen "geo" ve "ölçüm" anlamına gelen "metria" Yunanca kelimelerin birleşimidir, gerçekten de geometrinin orijinal kullanım alanları haritacılık ve inşaat gibi dünyasal ve astronomi gibi göksel ölçümleri içeriyordu. Antik Yunanlılar mantıksal muhakeme ustalarıydı ve bu branşı bugünkü olduğu sanat formuna da genişleterek taşıdılar. Zamanın (MÖ 300 civarları) bilinen bütün geometri bilgileri Öklid tarafından "Elemanlar" kitabında toplanmıştır ve bu kitap tüm zamanların en iyi ders kitaplarından biridir. Bu kitap matamatikçilerin bugün bile yararlandığı matematiksel kesinlik, mantıksal muhakeme, aksiyom metotları ve kanıt fikirlerini tüm dünyaya tanıtmıştır.

Öklid beş tane *aksiyom* ile başladı (bunlar; *postülat* olarak da bilinir). Bunlar doğruluğu sorgulanmadan doğru kabul edilmesi gereken önermelerdir. Bir kere bu aksiyomları kabul ederseniz, bunları kullanarak ana hatlarıyla bütün geometri kanunlarını elde edebilirsiniz. İşte Öklid'in o beş aksiyomu: (Aslında o, beşinci aksiyomu biraz daha farklı ifade etti ama bizim kullandığımız ifade ona denktir.)

Aksiyom 1: Verilen herhangi iki nokta biricik bir doğru parçasıyla birleştirilebilir.

Aksiyom 2: Doğru parçaları her iki yönde de sonsuza kadar uzatılarak doğrular elde edilir.

Aksiyom 3: Verilen herhangi P ve O noktaları için O noktasını merkez alan ve P noktasının üzerinde olduğu biricik bir çember vardır.

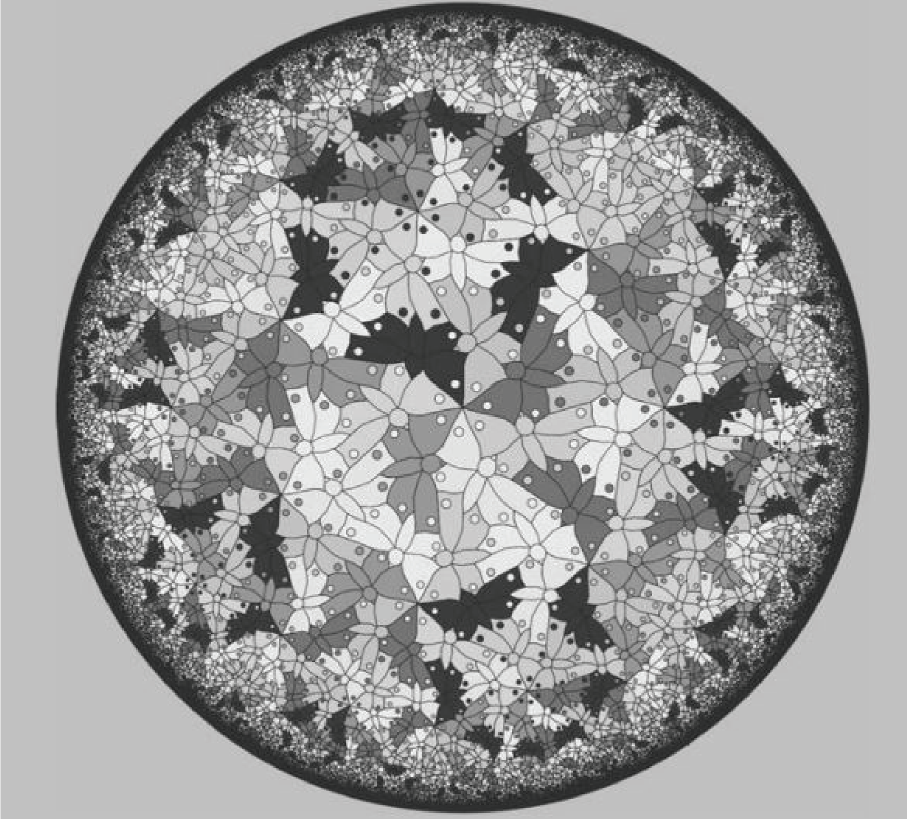
Aksiyom 4: Bütün dik açılar 90 derecedir.

Aksiyom 5: Bir l doğrusu ve bu doğrunun üzerinde olmayan P noktası verilmişse P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan tam olarak bir tane doğru vardır.

KOYU MATEMATİK

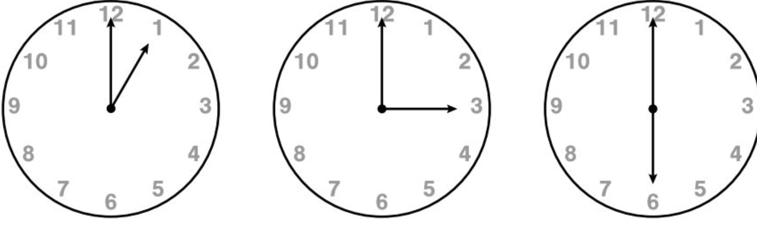
Şunu belirtmeliyim ki bu bölümde *düzlem geometrisi* ile çalışıyoruz (Öklid geometrisi olarak da bilinir), yani x - y düzlemi gibi düz bir yüzeyde çalıştığımız varsayılıyor. Ancak aksiyomları değiştirirsek yine ilginç ve faydalı matematiksel sistemler elde edebiliriz; küre üzerindeki noktaları inceleyen küresel geometri gibi. Küresel geometrideki "doğrular" maksimum çevreye sahip olan çemberlerdir (bunlara *geniş çemberler* denir) ve bunun sonucu olarak da bütün doğrular mutlaka bir yerde kesişmek zorundadır, yani paralel doğru yoktur. Eğer Aksiyom 5 değiştirilirse, diyelim ki P'den geçen ve l'ye paralel olan en az iki doğru varsa o zaman *hiperbolik geometriyi* ele ederiz ve onun da kendine özgü pek güzel teoremleri vardır. Sanatçı M. C. Escher tarafından yapılmış birçok harikulade çizim bu tip bir geometriyi temel alır. Aşağıdaki şekil Douglas Dunham tarafından hiperbolik geometri kanunları kullanılarak oluşturulmuştur ve kullanılmak üzere izin alınmıştır.





Tabii olarak, Öklid'in üzerinde durmadığı başka aksiyomlar da vardır. Bunlardan bazılarına gerekli olduğunda değineceğiz. Bu bölümün tam bir geometri ders kitabının yerini tutması amaçlanmadığı için en baştan başlayarak her şeyi tanımlayıp kanıtlamakla uğraşmayacağız. Nokta, doğru, açı, çember, çevre ve alan gibi konseptleri sezgisel olarak bildiğinizi varsayıp terimleri ve notasyon gösterimlerini minimum düzeyde tutmaya çalışacağım, böylece enteresan geometri fikirlerine konsantre olabiliriz.

Örneğin, bir çemberin 360 derece olduğunu ve bunun 360° olan gösterimini bildiğinizi ya da en azından bunun doğruluğunu kabul edeceğinizi varsayıyorum. Bir açının ölçüsü 0° ile 360° arasında bir sayıdır. Merkezde birleşmiş olan saatin ibrelerini düşünün: Saat 1'de, ibreler çemberin 1/12'sini gösterir yani 30 derecelik bir açı oluştururlar. Saat 3'de ibreler çemberin bir çeyreğini gösterir yani 90 derecelik bir açı oluştururlar.

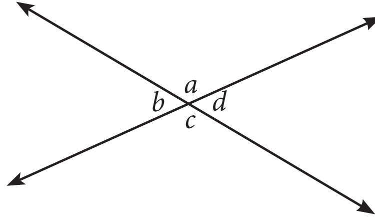


Yukardaki açılar 30°, 90° ve 180° ölçülüdür.

90 derecelik açılara *dik açı* denir ve bu açıları oluşturan doğrular ya da doğru parçaları birbirlerine *dik*tir. Düz bir doğru, saat 6'da olduğu gibi, 180 derece açıya sahiptir.

Şimdi çok pratik bir notasyon: A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası $\overline{AB}$ olarak gösterilir ve bunun uzunluğunu belirtmek için üst çizgi kaldırılır, yani $\overline{AB}$ doğru parçasının uzunluğu AB ile ifade edilir.

Eğer iki doğru kesişirse dört tane açı oluştururlar (bir sonraki sayfadaki çizimde gösterildiği gibi). Bu açılarla ilgili ne söyleyebiliriz? Dikkat ederseniz komşu açılar (a ve b açıları gibi) düz bir çizgi oluşturuyor, o da tam olarak 180 derecedir. Yani, a ve b açılarının toplamı 180 derecedir. Bu açılara *bütünler* açılar denir.



İki doğru kesiştiğinde oluşan komşu açıların toplamı 180 derecedir.
Komşu olmayan açılar (bunlara ters açılar denir) birbirine eşittir.
Burada a ve c açıları ters açı çifleridir, b ve d açıları da.

Bu özellik bütün komşu açı çiftleri için geçerlidir. Yani:

$$a + b = 180°$$

$$b + c = 180°$$

$$c + d = 180°$$

$$d + a = 180°$$

eşitlikleri doğrudur.

İlk eşitlikten ikinci eşitliği çıkarmak bize şunu verir: $a - c = 0$. Yani:

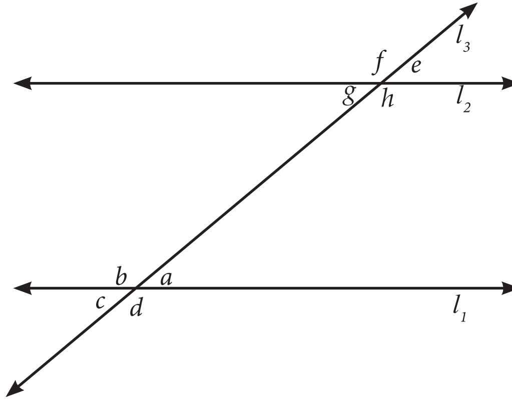
$$a = c.$$

Ve ikinci eşitlikten üçüncü eşitliği çıkarırsak şunu elde ederiz:

$$b = d.$$

İki doğru kesiştiğinde, birbirleriyle komşu olmayan açılara *ters* açılar denir. Az önce **ters açı teoremi**'ni kanıtladık: Ters açılar birbirlerine eşittir.

Bir sonraki hedefimiz herhangi bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu kanıtlamak. Bunun için öncelikle *paralel* doğrular hakkında birkaç şey söylemeliyiz. Eğer iki farklı doğru hiç kesişmiyorlarsa bunlara paralel denir. (Doğrularının her iki yönde de sonsuza kadar uzadığını unutmayalım.) Bir sonraki şekilde l_1 ve l_2 ile adlandırılmış iki paralel doğru ve onlara paralel olmayan ve dolayısıyla onları sırasıyla P ve Q noktalarında kesen bir l_3 doğrusu var. Şekle baktığımızda sanki l_3 doğrusu l_1 ve l_2 doğrularını aynı açıyla kesiyormuş gibi gözüküyor. Yani a açısının e açısına eşit olduğunu zannediyoruz. Bu a ve e açılarına yöndeş açılar denir. (Yöndeş açıların diğer örnekleri b ve f açıları, c ve g açıları ve d ve h açılarıdır.) Sadece şekle bakarak yöndeş açıların her zaman birbirlerine eşit olması gerekir gibi bir hisse kapılıyoruz ama bu aslında başlangıçta verdiğimiz beş aksiyomla kanıtlanabilen bir şey değil. Bu nedenle, yeni bir aksiyoma ihtiyacımız var.



Yöndeş açılar eşittir. Burada $a = e$, $b = f$, $c = g$ ve $d = h$.

Yöndeş açı aksiyomu: Yöndeş açılar eşittir.

Bunu Ters Açı Teoremi ile birleştirirsek, yukarıdaki şekilde şu eşitlikleri elde ederiz:

$$a = c = g = e$$

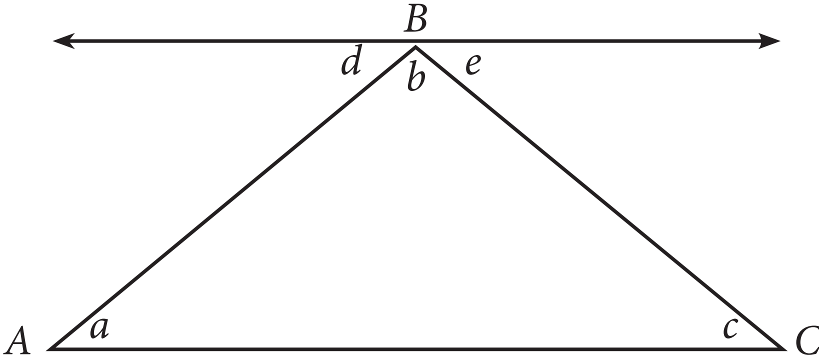
$$b = d = h = f$$

Matematik kitaplarında yukardaki bazı eşit açı çiftlerine özel isimler verilir. Örneğin, a ve g açılarına (Z şekli oluşturduklarına dikkat edelim) *iç ters açılar* denir. Yani, herhangi bir açının ters açısı, yöndeş açısı ve iç ters açısına eşit olduğunu göstermiş olduk. Şimdi bu sonucu geometrinin çok temel bir teoremini kanıtlamak için kullanacağız.

Teorem: Herhangi bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.

Kanıt: Bir sonraki şekildeki gibi a, b ve c açılarına sahip bir ABC üçgenini düşünelim. Şimdi B noktasından AC doğru parçasına paralel olan bir doğru çizelim.

d, b ve e açıları düz bir çizgi oluştururlar, yani $d + b + e = 180°$ olur. Ama a ve d açılarının ve aynı zamanda da c ve e açılarının iç ters açılar olduklarına dikkat edelim. O zaman $d = a$ ve $e = c$ olur yani tam da istediğimiz gibi $a + b + c = 180°$ oluyor. □

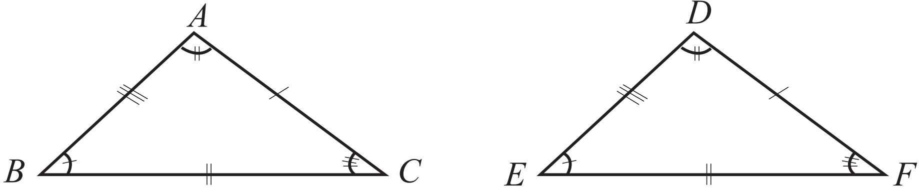


Neden $a + b + c$ toplamı 180° olur?

KOYU MATEMATİK

Üçgenlerdeki 180° teoremi düzlem geometrisinin çok temel bir kuralıdır ama bu kural diğer geometrilerde doğru olmak zorunda değil. Örneğin, Dünya üzerinde şöyle bir şekil düşünelim: Kuzey kutbundan başlayarak bir meridyen üzerinden ekvatora inen, ekvatordan sağa dönüp dünyanın çeğreği kadar yol alıp tekrar sağa dönerek kuzey kutbuna geri dönen üç kenardan oluşan bir şekil. Bu üçgen aslında üç tane dik açı içeriyor ve onların toplamı da 270° oluyor. Küresel geometride, üçgenin iç açıları toplamı sabit değildir ve bir üçgenin açıların toplamı 180 dereceden ne kadar fazlaysa o üçgenin alanı da o ölçüde büyük olur.

Geometri derslerinde çeşitli cisimlerin eş olduklarını kanıtlamaya çok önem gösterilir. İki cismin eş olması demek; birini kaydırarak, döndürerek ya da ters çevirerek diğer cismi elde edebiliyoruz demektir. Örneğin, aşağıdaki şekillerdeki *ABC* ve *DEF* üçgenleri eştir, çünkü *DEF* üçgenini sola kaydırarak *ABC* üçgeninin tam üstüne oturtabiliriz. Böyle şekillerde, iki kenar (ya da iki açı) üzerinde aynı sayıda çentik varsa bu ikisi de aynı uzunluğa (ya da ölçüye) sahip demektir.



Benzer üçgenler

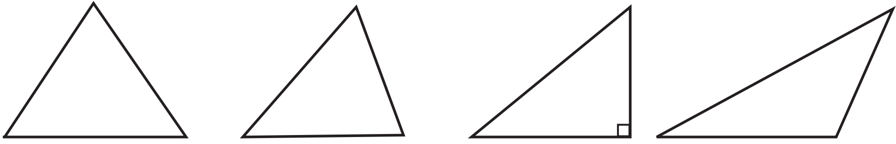
Bunu ≅ sembolü ile *ABC* ≅ *DEF* yazarak ifade ederiz. Bu "tüm uzunluklar ve açılar tam olarak aynıdır" demekle eşdeğerdir. Daha özel olarak: *AB*, *BC* ve *CA* kenarları sırasıyla *DE, EF* ve *FD* kenarlarına eşittir ve *A, B* ve *C* noktalarına denk gelen açılar da sırasıyla *D, E* ve *F* açılarına eşittir. Bunu şekiller üzerinde aynı açılara aynı sayıda çentik koyarak ve benzer şekilde aynı kenarlara da aynı sayıda çentik koyarak gösteriyoruz.

Bazı kenarların ve açıların eşit olduğunu bildiğinizde gerisi kendiliğinden anlaşılır. Mesela, eğer her üç kenarın aynı olduğunu biliyorsanız ve iki çift açı da aynıysa (diyelim ki $\angle A = \angle D$ ve $\angle B = \angle E$) o zaman üçüncü

açı çifti de eşit olmak zorundadır, yani üçgenler eştir. Aslında bu bilginin hepsine bile ihtiyacımız yok. Eğer iki kenar uzunluklarının aynı olduğunu biliyorsanız, diyelim ki *AB* = *DE* ve *AC* = *DF* ve eğer aralarındaki açılar da eşitse, burada ∠A = ∠D, o zaman şu diğer eşitlikler zorunludur: BC = EF, ∠B = ∠E ve ∠C = ∠F. Buna *KAK aksiyomu* denir, KAK ifadesi "kenar-açı-kenar" ifadesinin kısaltılmışıdır.

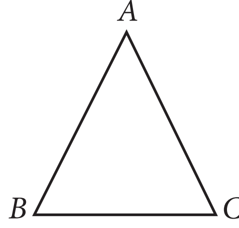
KAK aksiyomu bir teorem değildir, çünkü önceki aksiyomlar kullanılarak kanıtlanamaz. Ama bunun doğruluğunu varsaydığımızda, KKK (kenar-kenar-kenar), AKA (açı-kenar-açı) ve AAK (açı-açı-kenar) gibi teoremleri anında kanıtlayabiliriz. KKA ya da AKK teoremleri yoktur çünkü eşliği sağlamak için gereken ortak açı, uzunlukları aynı olan kenarların arasında olmak zorundadır. KKK teoremi en ilgi çekici olandır çünkü tam olarak şöyle bir şey söyler: Eğer iki üçgenin kenar uzunlukları aynıysa açı ölçüleri de aynı olmak zorundadır.

Şimdi KAK aksiyomunu kullanarak pek muhim ikizkenar üçgen teoremini kanıtlayalım. Eğer iki kenarının uzunluğu aynı ise o üçgene *ikizkenar* denir. Sırası gelmişken farklı üçgen tiplerinden de bahsedelim. *Eşkenar üçgen* bütün kenar uzunlukları aynı olan üçgendir. 90 derecelik bir açıya sahip bir üçgene *dik* üçgen denir. Eğer bir üçgenin bütün açıları 90 dereceden küçükse o üçgene *dar açılı* üçgen denir. Eğer bir üçgenin 90 dereceden büyük olan bir açısı varsa, o üçgene de *geniş açılı* üçgen denir.



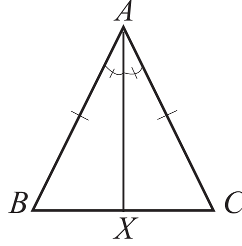
Eşkenar üçgen, dar açılı üçgen, dik üçgen ve geniş açılı üçgen

İkizkenar üçgen teoremi: *ABC* üçgeni *AB* = *AC* kenar uzunlukları eşit olan ikizkenar bir üçgense bu kenarların karşısında bulunan açılar da eşit olmak zorundadır.



İkizkenar üçgen teoremi: AB = AC ise ∠B = ∠C olur.

Kanıt: Aşağıdaki şekilde olduğu gibi *A* noktasından başlayan ve ∠A açısını ikiye bölen bir çizgi çizerek başlayalım. (Buna A*'nın açıortayı* denir.) Bunun $\overline{BC}$ doğru parçasında kestiği noktaya *X* diyelim.



İkizkenar üçgen teoremi bir açıortay çizilip sonra da kenar-açı-kenar aksiyomunun yeni oluşturulan üçgenlere uygulanmasıyla kanıtlanabilir.

İddiamız *BAX* ve *CAX* üçgenlerinin eş üçgenler olduğudur. Bu KAK aksiyomunun bir sonucudur, çünkü *BA* = *CA* (ikizkenar özelliğinden dolayı), ∠BAX = ∠CAX (açıortaydan dolayı) ve *AX* = *AX*. (Hayır, bir yazım hatası değil: $\overline{AX}$ kenarı karşılaştırdığımız iki üçgenin de bir kenarı ve her ikisinde de aynı uzunlukta!) Ve *BAX* ≅ *CAX* olduğundan, diğer kenarlar ve açılar da eşit olmak zorunda. Bizim durumumuzda, ∠B = ∠C ve bu da kanıtlamak istediğimiz şeydi. □

KOYU MATEMATİK

İkizkenar üçgen teoremi KKK teoremi kullanılarak da kanıtlanabilir. Bu kanıt için, *M* noktasını $\overline{BC}$ doğru parçasının orta noktası olarak tanımlayalım, yani $BM = MC$. Şimdi $\overline{AM}$ doğru parçasını çizelim. Bir önceki kanıtta olduğu gibi, *BAM* ve *CAM* üçgenleri eştir, çünkü $BA = CA$ (ikizkenarlık), $AM = AM$ and $MB = MO$ (orta nokta olması). Yani, KKK'den dolayı $BAM \cong CAM$ ve birbirlerine karşılık gelen açılar da eşit. Özellikle de istediğimiz üzere $\angle B = \angle C$.

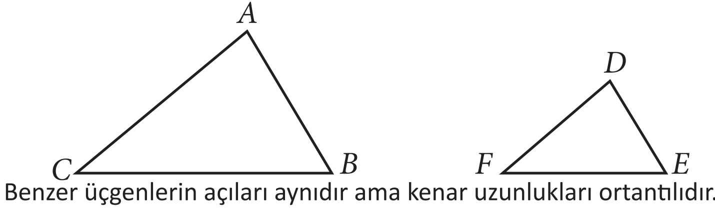
Benzerliğin bir sonucu olarak, $\angle BAM = \angle CAM$ eşitliğini elde ederiz, yani $\overline{AM}$ doğru parçası aynı zamanda açıortay. Dahası, $\angle BAM = \angle CAM$ eşitliğinden ve bu açıların toplamının 180° olması gerektiğinden dolayı, her ikisi de 90° olmak zorundadır. Yani, ikizkenar üçgende *A* noktasının açıortayı aynı zamanda $\overline{BC}$ doğru parçasının orta dikmesidir.

Bu arada, ikiz kenar üçgen teoreminin tersi de doğrudur. Yani, eğer $\angle B = \angle C$ (bunu varsaydığımızdan dolayı) ise o zaman $AB = AC$ olur. Bu orijinal kanıtta yapıldığı gibi *A* noktasından *X* noktasına bir açıortay çizilerek kanıtlanabilir. Şimdi AAK teoremine göre $BAX \cong CAX$ olduğunu görüyoruz, çünkü $\angle B = \angle C$ (varsayımımızdan dolayı), $\angle BAX = \angle CAX$ (açıortaylık) ve $AX = AX$. Yani $AB = AC$ olur ve bu nedenle de üçgen ikizkenardır.

Bütün kenar uzunluklarının eşit olduğu eşkenar bir üçgende, bir önceki teoremi bütün kenar çiftlerine uygulayarak bütün açıların da birbirine eşit olmak zorunda olduğunu görebiliriz. Yani bütün açıların toplamı olmasından dolayı şunu elde ediyoruz:

Sonuç: Eşkenar bir üçgende bütün açıların ölçüsü 60° olur.

KKK teoremine göre, eğer *ABC* ve *DEF* adında iki üçgenin kenar uzunlukları aynıysa ($AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$ oluyorsa) o zaman açıları da aynı olmak zorundadır (yani $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ olur). Peki bunun tersi doğru mu? Eğer *ABC* ve *DEF* diye iki üçgenin açıları aynıysa kenar uzunlukları da aynı mıdır? Tabii ki hayır, şu resimde de görebileceğimiz gibi:



Benzer üçgenlerin açıları aynıdır ama kenar uzunlukları ortantılıdır.

Aynı açı ölçülerine sahip iki üçgen benzer diye adlandırılır. Eğer *ABC* ve *DEF* diye iki üçgen benzerse ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ya da sadece $ABC \sim DEF$ oralar gösterilir) o zaman $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ olur. Temel olarak, benzer üçgenler birbirlerinin ölçekli halidir. Yani eğer $ABC \sim DEF$ ise o zaman bu iki üçgenin kenarları pozitif bir k çarpanıyla ölçeklendirilmiştir. Yani bir k pozitif sayısı için: $DE = kAB$, $EF = kBC$, $FD = kCA$ olur.

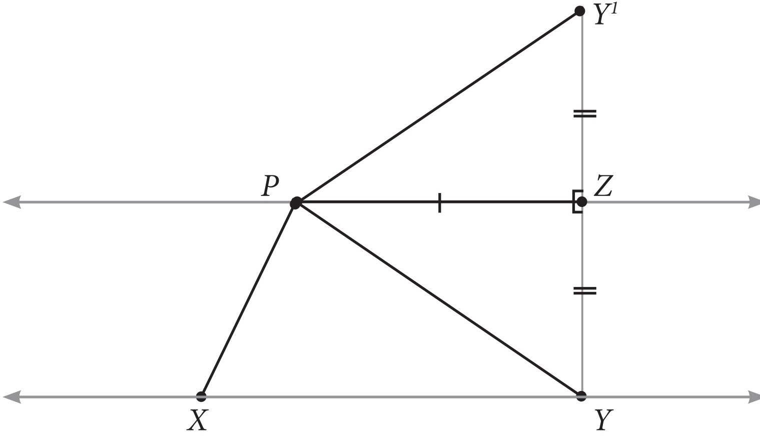
Şimdi şu ana kadar öğrendiklerimizi bölümün başındaki ikinci soruyu cevaplamak için kullanalım. Alttakinin üzerinde $\overline{XY}$ doğru parçası olan iki tane paralel doğru ile başlamıştık. Amacımız üst doğruda bir P noktası bulmak, öyle ki bununla oluşan *XYP* üçgeninin çevresi alabileceği en küçük değer olsun. Ve şunun doğru olduğunu iddia etmiştik:

Teorem: *XYP* üçgeninin çevresini minimize eden (üst doğrudaki) *P* noktası $\overline{XY}$ doğru parçasının tam üzerindedir.

Bu problem bir iki ince kalkülüs hesabı ile rahatlıkla çözülebilse de, geometri ile sadece birazcık "yansıma" kullanarak nasıl çözüme nasıl ulaşabileceğimizi göreceğiz. (Bu yapacağımız kanıt ilginç ama biraz uzun, dilerseniz sadece göz gezdirebilirsiniz ya da atlatabilirsiniz.)

Kanıt: *P* noktası üst çizgi üzerinde herhangi bir nokta olsun ve *Z* noktası da *Y* noktasının tam üzerindeki nokta olsun. (Tam olarak, *Z* noktası öyle bir yerleştiriliyor ki *Y* ile *Z* birleştirildiğinde oluşan $\overline{YZ}$ doğru parçası her iki paralel çizgiye de dik oluyor. Aşağıdaki şekilde görebilirsiniz.) *Y'* noktası da bu dikme üzerinde $Y'Z = YZ$ olacak şekilde seçilsin. Başka bir deyişle; eğer üstteki çizgi kocaman bir ayna olsaydı, *Y'* noktası *Y* noktasının *Z* noktasından geçen yansıması olurdu.

PZY ve *PZY'* üçgenlerinin eş olduklarını iddia ediyoruz. Çünkü, $PZ = PZ$, $\angle PZY = 90° = \angle PZY'$ ve $ZY = ZY'$, yani KAK aksiyomundan dolayı bu üçgenler eştir. Sonuç olarak artık $PY = PY'$ eşitliğinden faydalanabiliriz.



PZY ve PZY' üçgenleri eş olduklarından (KAK'den dolayı), PY = PY' olmak zorunda.

YXP üçgeninin çevresi şu üç uzunluğun toplamıdır:

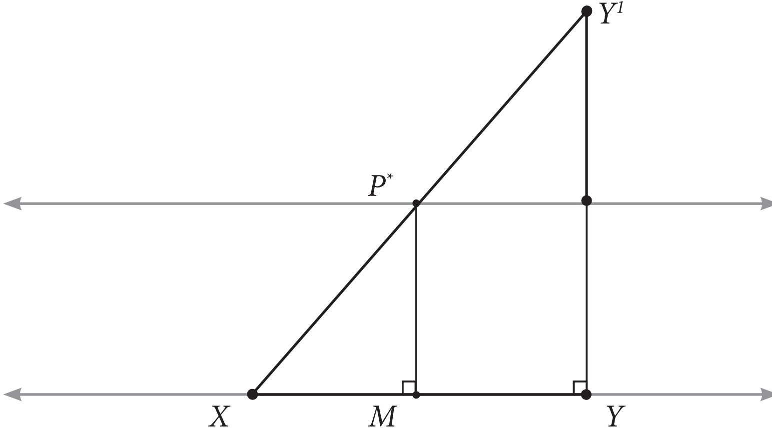
$$YX + XP + PY.$$

Ve *PY* = *PY*' olduğunu gösterdiğimiz için, bu toplam aynı zamanda şuna eşittir:

$$YX + XP + PY'.$$

Burada *YX* uzunluğu *P* noktasına bağlı değil, yani problem basitleşip *XP* + *PY′* uzunluğunu minimize eden *P* noktasını bulmaya dönüşüyor.

$\overline{XP}$ ve $\overline{PY}'$ doğru parçalarının *X* noktasından *Y′* noktasına giden çarpık bir yol oluşturduğunu farkedelim. İki nokta arasındaki en kısa uzaklık düz bir çizgi olduğundan, *X* noktasından *Y′* noktasına giden doğruyu çizip bu doğrunun üstteki çizgiyle kesiştiği yerdeki *P** noktası bunun için en doğru nokta olacaktır. Bunu aşağıdaki şekil üzerinde görebilirsiniz. Ama henüz bitirmedik. Kanıtı bitirmek için *P** noktasının $\overline{XY}$ doğru parçasının orta noktasının tam üzerinde olduğunu kanıtlamalıyız.



MXP ve YXY' üçgenleri 2 ölçekli benzer üçgenlerdir*

M noktası P^* noktasının tam altındaki nokta olsun (böylece $\overline{P^*M}$ doğru parçası $\overline{XY}$ doğru parçasına dik olur). Alttaki ve üstteki iki çizgi paralel olduklarından P^*M ve ZY uzunlukları aynı olmalıdır. (Bu sezgisel olarak kulağa mantıklı geliyor çünkü paralel doğruların arasındaki mesafe sabit olmalıdır, ancak bu aynı zamanda $\overline{MZ}$ doğru parçası çizilip MYZ ve ZP^*M üçgenlerinin AAK teoreminden dolayı eş oldukları gösterilerek de kanıtlanabilir.)

M noktasının $\overline{XY}$ doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlamak için öncelikle MXP^* ve YXY' üçgenlerinin benzer olduklarını gösterelim. $\angle MXP^*$ ve $\angle YXY'$ açılarının aynı açılar olduğunu farkedelim, $\angle P^*MX = \angle Y'YX$ açıları eşittir çünkü ikisi de dik açı ve iki tane açı eşleştiği için üçüncü açı da eşleşmelidir, çünkü bu üç açının toplamı 180° olmak zorunda. Peki bu iki benzer üçgen arasındaki ölçek katsayısı nedir? Yaptığımız inşadan dolayı:

$$YY' = YZ + ZY' = 2YZ = 2MP^*$$

eşitliklerini elde ediyoruz, yani ölçek katsayısı 2 oluyor. Sonuç olarak, XM uzunluğu XY uzunluğunun yarısıdır, ve dolayısıyla $\overline{XY}$ doğru parçasının orta noktasıdır.

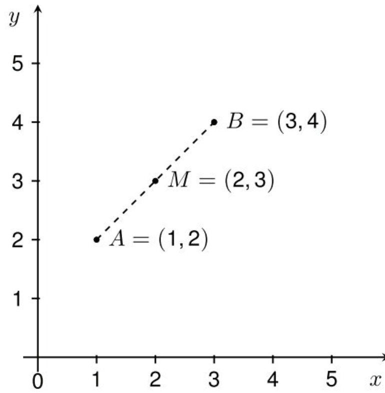
Özetlersek, XYP üçgeninin çevresini minimize eden üstteki doğrudaki P^* noktasının $\overline{XY}$ doğru parçasının orta noktasının tam üzerinde olduğunu göstermiş olduk. □

Bazı geometri problemleri cebir kullanılarak da çözülebilir. Örneğin, düzlem üzerinde koordinatları (a_1, a_2) olan A noktası ve koordinatları (b_1, b_2) olan B noktası arasında $\overline{XY}$ doğru parçası çizilmiş olsun. A ile B arasındaki yolun orta noktasına M dersek, o zaman M noktasının koordinatları aşağıda gösterildiği gibi:

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2} , \frac{a_2+b_2}{2} \right)$$

olur.

Mesela, $A = (1, 2)$ ve $B = (3 , 4)$ olsun. O zaman $\overline{AB}$ doğru parçasının orta noktası $M = ((1 + 3)/2 \ , (2 + 4)/2 \ ) = (2 ,3)$.



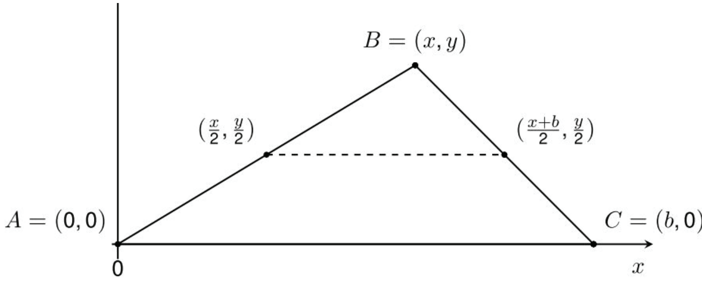
Bir doğru parçasının orta noktası uç noktalarının koordinatlarının ortalaması alınarak bulunabilir.

Şimdi bu bilgiyi üçgenlerle alakalı pek faydalı bir olguyu kanıtlamak için kullanacağız. Bir üçgen çizin, sonra da iki tane kenarın orta noktalarını bir doğru parçası ile birleştirin. Enteresan bir şey farkettiniz mi? Cevap bir sonraki teoremde:

Üçgen ortanokta teoremi: *ABC* herhangi bir üçgense, $\overline{AB}$ ve $\overline{BC}$ doğru parçalarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasını çizersek, o zaman bu doğru parçası üçüncü kenar olan $\overline{AC}$ doğru parçasına paralel olur. Dahası, eğer $\overline{AC}$ doğru parçasının uzunluğu b ise o zaman kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu da *b*2 olmak zorundadır.

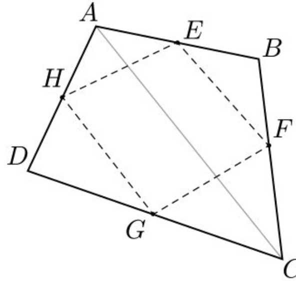
Kanıt: *ABC* üçgenini aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi düzlem üzerine yerleştirelim, öyle ki *A* noktası orijin olan (0, 0) noktası, *AC* kenarı da yatay uzanarak *C* noktası (*b*, 0) noktası üzerine gelecek şekilde dursun. Diyelim

ki *B* noktasının koordinatları da (x, y) olsun. O zaman $\overline{AB}$ doğru parçasının koordinatları $(x/2,\ y/2)$ olur ve $\overline{BC}$ doğru parçasının koordinatları da $((x + b)/2,\ y/2)$ olur. Her iki orta noktanın da *y*-koordinatları aynı olduğundan, onları birleştiren doğru parçası yatay uzanıyor olmalıdır, yani $\overline{AC}$ doğru parçasına paralel olacaktır. Ayrıca bu doğru parçasının uzunluğu da istediğimiz gibi $(x + b)/2 - x/2 = b/2$ olacaktır. □



Bir üçgenin iki kenarının orta noktaları bir doğru parçası tarafından birleştirldiğinde bu doğru parçası üçüncü kenara paralel olur ve onun yarı uzunluğundadır.

Üçgen orta nokta teoremi bölümün başında verdiğimiz sihirbazlık numarasının gizemini çözüyor. Bir *ABCD* dörtgeniyle başlayıp orta noktaları birleştirerek ikinci bir *EFGH* dörtgenini elde etmiştik ve bu yeni dörtgen her zaman bir paralelkenar oluyordu. Şimdi niye öyle oluyor anlayalım: *A* köşesinden *C* köşesine bir köşegen çizdiğimizi düşünürsek, bir sonraki şekilde de görülebileceği gibi *ABC* ve *ADC* üçgenlerini oluşturmuş oluruz.



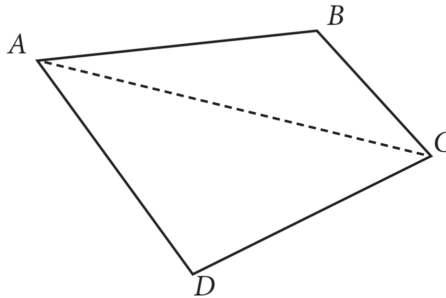
Üçgen ortanokta teoreminden dolayı ve doğru parçalarının ikisi de doğru parçasına paraleldir

Üçgen ortanokta teoremini *ABC* ve *ADC* üçgenlerine uyguladığımızda, $\overline{EF}$ doğru parçasının $\overline{AC}$ doğru parçasına paralel olduğunu ve $\overline{AC}$ doğru parçasının da $\overline{GH}$ doğru parçasına paralel olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla $\overline{EF}$ doğru parçası $\overline{GH}$ doğru parçasına paralel olur. (Dahası $\overline{EF}$ ve $\overline{GH}$ doğru parçalarının uzunlukları aynıdır çünkü ikisinin de uzunluğu $\overline{AC}$ doğru parçasının uzunluğunun yarısıdır.) Aynı mantıkla, *B* ve D noktalarını birleştiren köşegen çizgiyi düşündüğümüzde $\overline{FG}$ ve $\overline{HE}$ doğru parçalarının paralel olduklarını ve aynı uzunluğa sahip olduklarını görüyoruz. Yani *EFGH* bir paralelkenardır.

Önceki teoremlerin birçoğu üçgenler ile alakalıydı, gerçekten de geometride zamanın çoğu üçgenler üzerinde çalışmakla geçer. Üçgenler *çokgen*lerin en basitleridir, daha sonra ise *dörtgen*ler (4-kenarlı çokgenler), *beşgen*ler (5-kenarlı çokgenler) gelir ve bu böyle devam eder. *n* tane kenara sahip bir çokgen kimi zaman *n-gen* olarak adlandırılır. Üçgenin iç açılarının 180° olduğunu kanıtladık. Peki üçten çok kenarı olan çokgenler hakkında ne söylenebilir? Bir dörtgenin, mesela kare, dikdörtgen ya da paralelkenar gibi, dört kenarı vardır. Dikdörtgende dört iç açının hepsi 90° ölçüsüne sahiptir, yani iç açıların toplamı 360° olmak durumundadır. Bir sonraki teorem bunun bütün dörtgenler için doğru olduğunu söyleyecek. Bunu 4-gen mutabakatı olarak adlandırabiliriz. (Pardon, kendimi tutamadım!)

Teorem: Bir dörtgenin iç açılarının toplamı 360 derecedir.

Kanıt: Bir sonraki şekilde görüldüğü gibi köşelerini *A, B, C* ve *D* olarak isimlendireceğimiz herhangi bir dörtgen alalım. *A* noktasından *C* noktasını bir doğru parçası çizerek bu dörtgeni iki üçgene parçalayabiliriz, her birinin de iç açıları toplamı 180° olacaktır. Dolayısıyla bu dörtgenin iç açıları toplamı $2 \times 180° = 360°$ olur. □

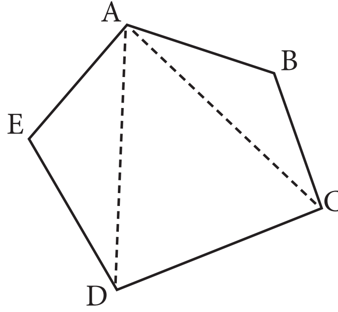


Bir dörtgenin iç açıları toplamı 360 derecedir.

Bir tane daha teorem genel kuralı ortaya çıkaracaktır:

Teorem: Bir beşgenin iç açıları toplamı 540 derecedir.

Kanıt: Aşağıdaki gibi köşeleri *A, B, C, D* ve *E* olan bir beşgen düşünelim. *A* noktasından *C* noktasına bir doğru parçası çizersek bu beşgeni bir üçgene ve bir dörtgene parçalamış oluruz. Biliyoruz ki *ABC* üçgenin iç açıları toplamı 180° ve 4-gen mutabakatımızdan dolayı *ACDE* dörtgeninin iç açıları toplamı da 360°. Dolayısıyla bir beşgenin iç açıları toplamı 180° + 360° = 540° olur. ☐

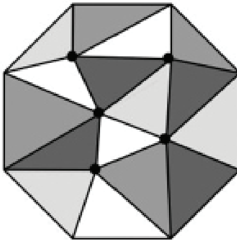
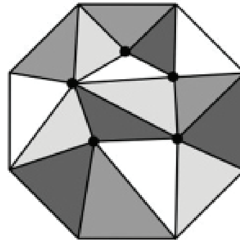
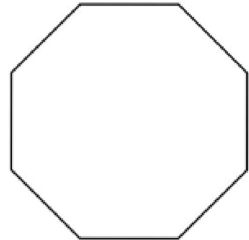


Bir beşgenin iç açıları toplamı 540 derecedir.

Bu argümanı tekrarlayarak ya A noktasından diğer bütün köşelere doğru parçaları çizerek *n* - 2 tane üçgen oluşturup ya da tümevarım metotuyla kanıtlayarak herhangi bir n-gen için şu teoremi elde edebiliriz:

Teorem: Bir *n*-gen'in iç açıları toplamı 180 (*n* -2) derecedir.

İşte size bu teoremin büyüleyici bir uygulaması. Bir *sekizgen* çizin (8-kenarlı bir çokgen) ve içine herhangi 5 tane nokta işaretleyin. Sonra da bu köşeleri dilediğiniz gibi içerideki bütün şekiller üçgen olacak biçimde birleştirin. (Buna *üçgenleme* denir.) Aşağıda değişik iki üçgenleme var, bir tanesi de sizin denemeniz için boş bırakılmıştır.

Her iki örnekte de toplam 16'şar tane üçgen var. Üçüncü sekizgende, bu 5 noktayı içeride nereye işaretlerseniz işaretleyin tam olarak 16 tane üçgen elde etmeniz gerekiyor, yoksa yanlış bir şey yapıyorsunuzdur (Eğer 16 tane üçgen elde etmediyseniz, içerideki her bölgeye dikkatlice bakın ve sadece üç tane köşesi olduğundan emin olun. Eğer üçgen gibi görünen bir bölgenin dört tane köşesi varsa o zaman bir tane daha doğru parçası ekleyip düzgünce iki üçgene ayırmalısınız). Bunun açıklamasına bir sonraki teoremle erişebiliriz:

Teorem: n tane kenara ve p tane iç noktaya sahip bir çokgenin herhangi bir üçgenlemesi tam olarak $2p + n - 2$ tane üçgene sahiptir.

Bir önceki örnekte $n = 8$ ve $p = 5$ oluyor, yani bu teoreme göre elde edilebilecek üçgen sayısı tam olarak 10 + 8 - 2 = 16 olmalıdır.

Kanıt: Diyelim ki üçgenleme tam olarak T tane üçgene sahip. Aşağıdaki soruya iki farklı şekilde cevap vererek $T = 2p + n - 2$ olduğunu kanıtlayacağız.

Soru: Bütün üçgenlerin iç açıları toplamı kaçtır?

1. *Cevap:* T tane üçgen olduğundan, ve herbir üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğundan, bu toplam $180T$ olmak zorundadır.

2. *Cevap:* Çözümü iki duruma ayıralım. p tane iç noktanın herbirinin çevresindeki açıların tam bir daire yapıyor, yani bunların toplamda $360p$ kadar payı var. Diğer bir taraftan, bir önceki teoreme göre, biliyoruz ki bir n-gen'in iç açıları toplamı $180\ (n - 2)$ derece. Dolayısıyla açıların toplamı $360p + 180\ (n - 2)$ derecedir.

Şimdi iki cevapta bulduğumuz sonuçları birbirlerine eşitlersek, şunu elde ederiz:

$$180T = 360p + 180\ (n - 2)$$

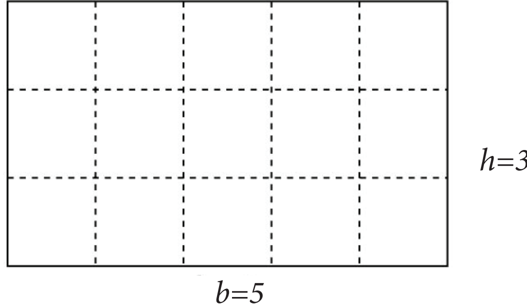
Her iki tarafı da 180'e bölmek tahmin ettiğiniz üzere şunu verir:

$$T = 2p + n - 2.$$



Çevre ve Alan

Bir çokgenin *çevre*si kenar uzunluklarının toplamıdır. Örneğin, taban uzunluğu b yüksekliği h olan bir dikdörtgenin çevresi $2b + 2h$ olur, çünkü iki tane kenarının uzunlukları b ve diğer iki kenarının uzunlukları da h. Peki ya dikdörtgenin alanı? Kenar uzunlukları 1'e 1 (birebir) olan bir karenin (*birim kare*) *alanı*nı 1 olarak tanımlıyoruz. Aşağıdaki şekilde olduğu gibi b ve h pozitif tamsayılar olduğu zaman alanı bh tane 1'e 1 kareye bölebiliyoruz, yani bu dikdörtgenin alanı bh oluyor. Daha genel olarak, tabanı b ve yükseliği h (burada b ve h pozitif ama tamsayı olmak zorunda değiller) olan bir dikdörtgenin alanını bh olarak tanımlıyoruz.



Taban uzunluğu yüksekliği b olan bir dikdörtgenin çevresi $2b+2h$ alanı bh olur.

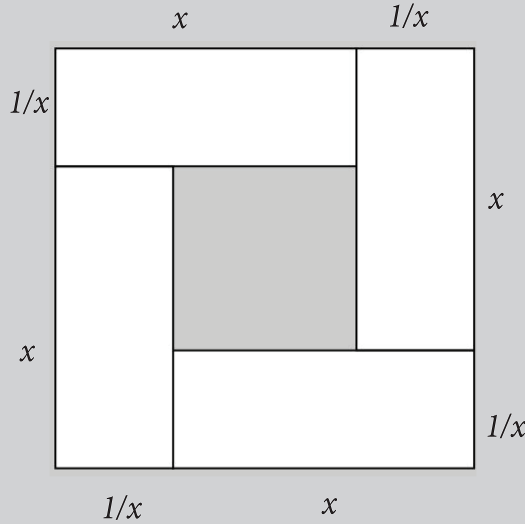
KOYU MATEMATİK

Bu bölüm boyunca, cebirsel yöntemleri geometrik olguları açıklamak için kullandık. Ancak bazen de geometri cebirsel olguları anlamamıza yardımcı olabilir. Mesela şu cebir problemini düşünelim: x pozitif bir sayı olmak üzere, $x + 1/x$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir? $x = 1$ olduğunda bu değer 2 oluyor, $x = 1,25$ olduğunda $1,25 + 0,8 = 2,05$ elde ediyoruz, $x = 2$ olduğunda 2,5 elde ediyoruz. Bu bilgiler elde edebileceğimiz en küçük değerin 2 olduğu hissini veriyor bize ve bu doğru ama bundan nasıl emin olabiliriz? 11. Bölüm'de kalkülüs hesabı kullanarak bu soruya doğrudan cevap veren bir metot göreceğiz ama biraz kurnazlıkla bu soruyu basit geometrik metotlarla da çözebiliriz.



KOYU MATEMATİK

Aşağıdaki geometrik şekli düşünelim; dört adet dominodan oluşuyor, herbirinin boyutları x ve $1/x$ ve öyle dizilmişler ki ortada kare şeklinde bir açıklık var. Ortadaki açıklık da dahil olmak üzere bu bütün şeklin alanı nedir?



Bir yandan bu şekil bir kenarının uzunluğunun $x + 1/x$ olduğu bir kare olduğundan, alan $(x + 1/x)^2$ olmalı. Öte yandan, herbir dominonun alanı 1, dört tane domino olduğundan toplam alan 4'den büyük olmak zorunda. Sonuç olarak:

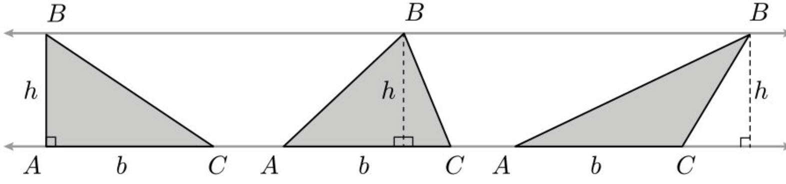
$$(x + x/x)^2 \geq 4$$

Bu da istediğimiz gibi $x + 1/x \geq 2$ eşitsizliğini verir. 

Bir dikdörtgenin alanından yola çıkarak, hemen hemen bütün geometrik şekillerin alanlarını bulmak mümkündür. Bunların ilki ve en önemlisi olan üçgenin alanını hesaplayalım.

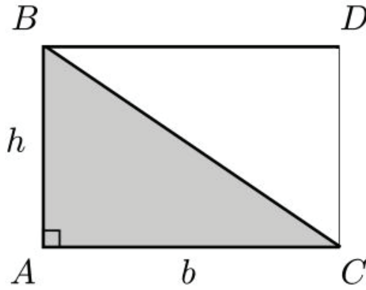
Teorem: Taban uzunluğu b ve yüksekliği h olan bir üçgenin alanı 1/2 bh olur.

Bunu kavrayabilmek için aşağıda gösterilen üç adet üçgenin herbirinin aynı b taban uzunluğuna ve h yüksekliğine sahip olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla hepsinin alanı da aynı olacaktır. Bu temel olarak bölüm başında verdiğimiz üçüncü sorunun kapsamında bir durum ve aslında bir hayli şaşırtıcı.



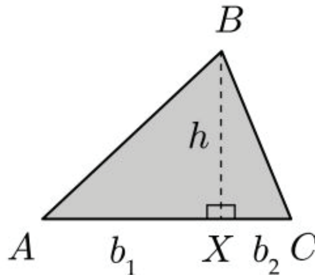
Taban uzunluğu *b* yüksekliği h olan bir üçgenin alanı $\frac{1}{2}$ bh olur
Üçgenin dik, dar açılı ya da geniş açılı olması farketmezsizin bu doğrudur.

Burada ∠A ve ∠C taban açılarına bağlı olarak göz önünde bulundurmamız gerek üç durum var. Eğer ∠A ya da ∠C açısı dik açıysa o zaman aşağıda da gösterildiği gibi, *ABC* üçgenin bir kopyasını alıp bu ikisini bir üstüste koyarak alanı *bh* olan bir dikdörtgen oluşturabiliriz. *ABC* üçgeni, dikdörtgenin alanının yarısını kapladığından, alanı iddia ettiğimiz gibi dikdörtgenin alanının yarısı olur, o da $\frac{1}{2}$ *bh*.



Taban uzunlukları b yükseklikleri h olan iki dik açılı üçgen alanı bh olan bir dikdörtgen oluşturur.

Eğer ∠A ve ∠C açıları dar açılarsa hoş bir kanıt sunabiliriz. Aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi, *B* noktasından $\overline{AC}$ doğru parçasına dik olan doğru parçasını çizelim (buna dikme denir), ki bunun uzunluğu *h* olur, tabanı kestiği noktaya da *X* diyelim.

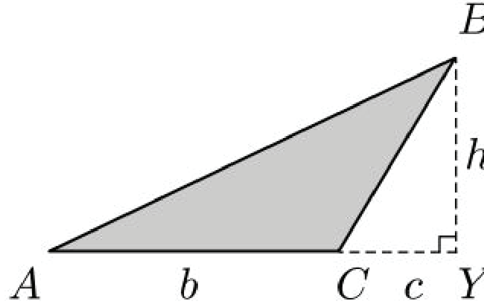


$\overline{AC}$ doğru parçasını uzunluklarına sırasıyla b_1 ve b_2 diyeceğimiz $\overline{AX}$ ve $\overline{XC}$ doğru parçaları olarak iki parçaya bölüyoruz, bu durumda $b_1 + b_2 = b$ olur. Şimdi, *BXA* ve *BXC* üçgenleri dik üçgenler oldukları için bir önceki durum bize alanlarının sırasıyla $\frac{1}{2} b_1 h$ ve $\frac{1}{2} b_2 h$ olduğunu söylüyor. Dolayısıyla *ABC* üçgeninin alanı da istediğimiz üzere:

$$\frac{1}{2} b_1 h + \frac{1}{2} b_2 h = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h = \frac{1}{2} bh$$

olur.

A açısı ya da *C* açısı geniş açıysa, şuna benzeyen bir şekil elde ediyoruz:



Dar açılı durumda *ABC* üçgenini iki tane dik açılı üçgenin toplamı gibi görmüştük. Burada da *ABC* üçgenini *ABY* ve *CBY* üçgenlerinin farkı gibi göreceğiz. *ABY* büyük üçgeninin tabanı uzunluğu $b + c$, bu nedenle alanı da $\frac{1}{2}(b + c)\, h$ olur. Daha küçük olan *CBY* üçgeninin alanı da $\frac{1}{2} ch$. Dolayısıyla *ABC* üçgeninin alanı istediğimiz üzere;

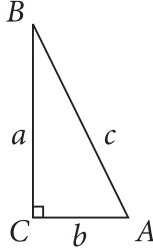
$$\frac{1}{2} (b+c)\, h - \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} bh$$

olur. ☺

Pisagor Teoremi

Pisagor teoremi muhtemelen geometrinin en bilinen teoremidir ve gerçekten de matematiğin en ünlü teoremidir ve kesinlikle kendine özel bir başlığı hakediyor. Bir dik üçgende, dik açının karşısındaki kenara *hipotenüs* denir. Diğer kenarlar da *dik kenarlar* olarak adlandırılır. Aşağıdaki şekildeki dik üçgenin dik kenarları $\overline{BC}$ ve $\overline{AC}$ doğru parçaları, hipotenüsü

de $\overline{AB}$ doğru parçasıdır, uzunlukları da sırasıyla a, *b* ve *c.*



Pisagor teoremi: Dik kenar uzunlukları *a* ve *b*, hipotenüs uzunluğu *c* olan bir dik üçgen için;

$$a^2 + b^2 = c^2$$

olur.

Pisagor teoreminin bilinen 300'den fazla kanıtı vardır, ancak burada en basit olanları sunacağız. Bazı kanıtları gönül rahatlığıyla atlayabilirsiniz. Amacım; kanıtlardan en azından birinin sizi gülümsetmesi ya da "İyiymiş!" dedirtmesi.

1. Kanıt: Bir sonraki şekilde, dört tane dik üçgeni monte ederek büyük bir kare oluşturduk.

Soru: Bu büyük karenin alanı nedir?

1.Cevap: Karenin herbir kenarının uzunluğu $a + b$, o zaman alan da:

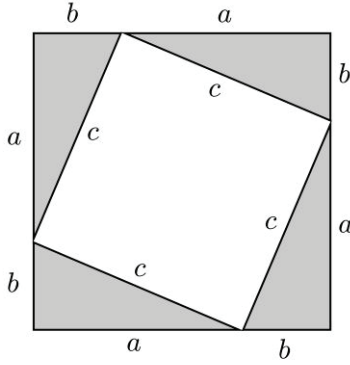
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2.Cevap: Öte yandan, büyük kare herbirinin alanının $ab/2$ olduğu dört üçgenden ve alanı c^2 olan ortadaki eğik kareden meydana geliyor. (Peki ortadaki şekil neden bir kare? Bütün kenar uzunluklarının eşit olduğunu biliyoruz ve bütün açıların eşit olduğunu da şeklin simetrik olduğunu kullanarak görebiliriz: Eğer büyük kareyi 90 derece döndürürsek farklı bir görüntü elde etmeyiz, demek ki ortadaki dörtgenin açıları da aynı olmak zorunda. Bir dörtgenin iç açıları toplamı 360 derece olduğundan, her bir açısının 90 derece olmak olduğunu görüyoruz) Dolayısıyla toplam alan $4(ab)/2 + c^2 = 2ab + c^2$.

Şimdi birinci ve ikinci değerleri birbirlerine eşitlersek şunu elde ederiz:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

eşitliğini verir.

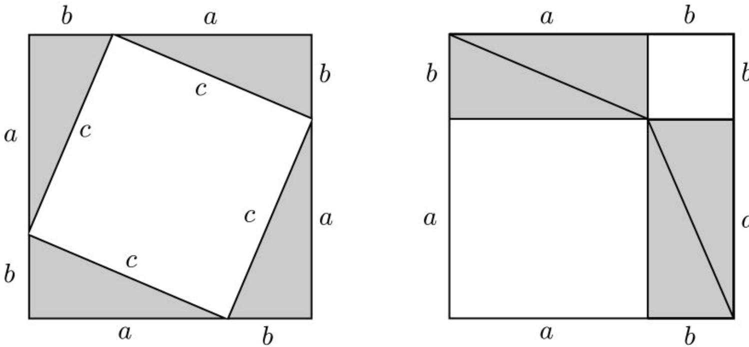


Büyük karenin alanını iki farklı şekilde hesaplayın.
Bulduğunuz iki farklı cevabı karşılaştırırsanız, Pisagor teoremi belirecektir.

Eşitliğin her iki tarafından da $2ab$ değerini çıkarırmak dilediğimiz;

$$a^2 + b^2 = c^2$$ 

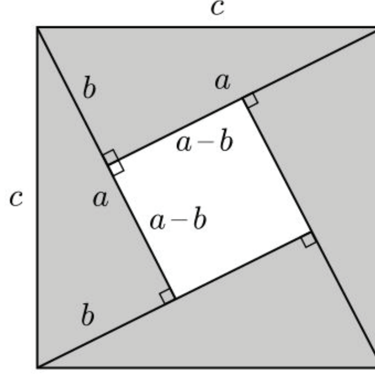
2. Kanıt: Yukarıdaki aynı şekli kullanarak, aşağıda görüldüğü gibi üçgenleri yeniden düzenleyelim. İlk şekilde üçgenler tarafından kaplanmayan alan c^2. Yeni oluşturduğumuz şekilde üçgenler tarafından kaplanmayan alan $a^2 + b^2$ olarak gözüküyor. O zaman tam da istediğimiz gibi $c^2 = a^2 + b^2$ olur. 



Bu iki şekildeki beyaz bölgelerin alanlarını kıyaslayın: $a^2 + b^2 = c^2$

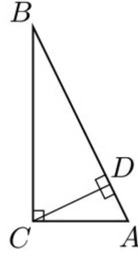
3. Kanıt: Bu sefer bu dört üçgenimizi öyle bir şekilde ayarlayacağız ki ortada oluşan kare c^2 alanına sahip daha ufak bir kare olsun. (Bu şeklin kare olmasının nedenlerinden biri herbir köşenin toplamları 90° olan ∠A

ve ∠B açılarından meydana gelmesidir) Daha önceki hesaptaki gibi dört tane üçgen toplam alana $4(ab/2) = 2ab$ değerinde katkıda bulunacaktır. Ortadaki eğik karenin alanı da $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Dolayısıyla toplam alan istediğimiz gibi şuna eşit olur: $2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$. ☺



Bu şeklin alanı hem hem de c^2 hem de $a^2 + b^2$

4. Kanıt: İşte *benzer* bir kanıt daha, benzer derken şimdi benzer üçgenler hakkında bildiklerimizi kullanacağız. Aşağıda gösterildiği gibi, *ABC* dik üçgeninde hipotenüse dik $\overline{CD}$ doğru parçasını çizelim.



ADC üçgeninin hem bir dik açıya hem de ∠A açısına sahip olduğuna dikkat edelim, yani üçüncü açısı da ∠B açısına eş olmalıdır. Benzer şekilde, *CDB* üçgeni de hem bir dik açı hem de ∠B açısına sahip, yani üçüncü açısı da ∠A açısı ile eş olmalı. Sonuçta, bu üç üçgen de benzerdir:

$$\Delta ACB \sim \Delta ADC \sim \Delta CDB.$$

Yalnız bu harflerin sıralamaları önemli. ∠ACB = ∠ADC = ∠CDB = 90° hepsi dik açılar; benzer şekilde ∠A = ∠BAC = ∠CAD = ∠CDB ve ∠B = ∠CBA = ∠DCA = ∠DCB. İlk iki üçgenin kenar uzunluklarını kıyaslarsak:

$$AC/AB = AD/AC \Longrightarrow AC^2 = AD \times AB.$$

Birinci ve üçüncü üçgenlerin kenar uzunluklarını kıyaslarsak:

$$CB/BA = DB/BC \Rightarrow BC^2 = DB \times AB.$$

Bu eşitlikleri birbirlerine eklersek:

$$AC^2 + BC^2 = AB \times (AD + DB).$$

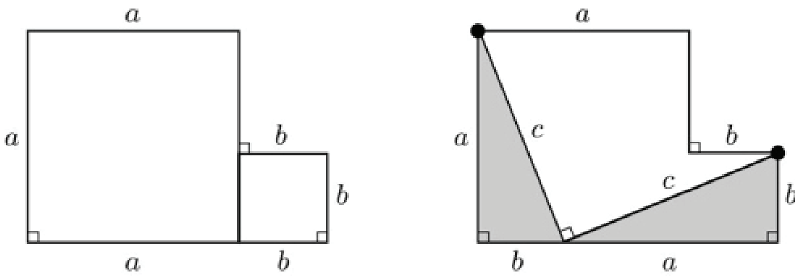
AD + DB = AB = c olduğundan, dilediğimiz sonuca ulaşıyoruz:

$$b^2 + a^2 = c^2.$$



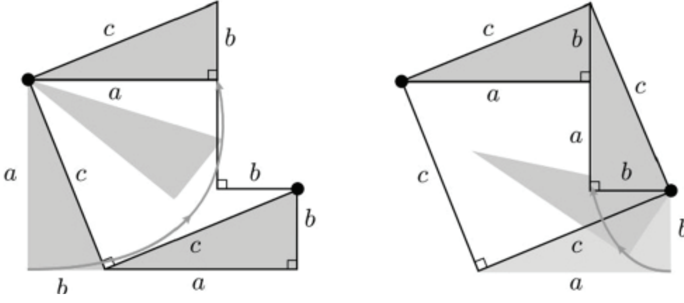
Bir sonraki kanıt tamamen geometrik. Cebirsel bir işleme gerek duymuyor ama biraz görselleştirme becerisi gerektirebilir:

5. Kanıt: Bu sefer alanları a^2 ve b^2 olan iki tane kareyle başlıyoruz, aşağıdaki şekildeki gibi yanyana konulmuş. Toplam alanlar $a^2 + b^2$. Bu şekli iki tane dik üçgenle (dik kenar uzunlukları a, b ve hipotenüs uzunluğu olan) bir tane de garip biçimli şekle parçalayalım. Bu garip biçimli şeklin alt tarafındaki açının olmak zorunda olduğuna dikkat edelim, çünkü ∠A ve ∠B ve açıları ile çevrelenmiş bir durumda. Büyük karenin sol üst köşesine ve küçük karenin sağ üst köşesine birer menteşe yerleştirdiğimizi düşünelim.



Toplam alanları $a^2 + b^2$ olan iki kare dönüşüm geçirerek...

Şimdi, sol alttaki üçgenin menteşe etrafında saatin tersi yönünde   90° döndürüldüğünü farz edelim, öyle ki üçgen büyük karenin dışına çıkıp üst kısmına dayansın. Sonra da altta gösterildiği gibi, sağ alttaki üçgenin diğer menteşe etrafında bu sefer saat yönünde derece döndürülsün ve dik açılar tam üst üste gelsin ve üçgen de köşeye rahatça otursun.



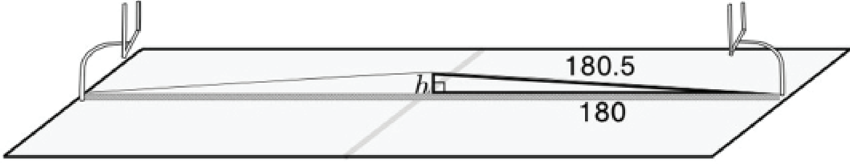
... alanı c^2 olan bir kare oluyor!

Sonuçta elde ettiğimiz şekil alanı c^2 olan eğik bir kare. Ve söz verdiğimiz üzere:

$$a^2 + b^2 = c^2!$$



Pisagor teoremini bölümün başında verdiğimiz amerikan futbol sahası sorusunu çözmek için kullanabiliriz. Bu sahanın uzunluğu 360 birimdi ve iki kaleyi birbirine bağlayan 361 birim ip vardı.



Pisagor teoremine göre $h^2+180^2 = 180{,}5^2$

İki kale arasındaki uzaklık 180 birim. İp orta noktadan kaldırılıp ulaşabileceği en yüksek h uzunluğuna kadar kaldırılınca, yukardaki şekilde de gösterildiği gibi, bir dik kenar uzunluğu 180 ve hipotenüs uzunluğu da 180,5 olan bir dik üçgen elde ediyoruz. Yani Pisagor teoremini ve bir iki satır cebirsel hesap kullanarak:

$$h^2 + 180^2 = 180{,}5^2$$

$$h^2 + 32.400 = 32.580{,}25$$

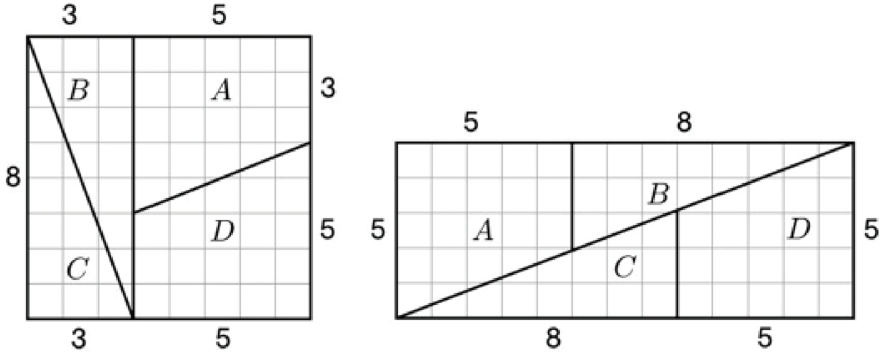
$$h^2 = 180{,}25$$

$$h = \sqrt{180{,}25} \approx 13{,}43 \text{ birim} \approx 4 \text{ metre}$$

Yani ip, altından birçok kamyonun geçebileceği kadar yüksektir!

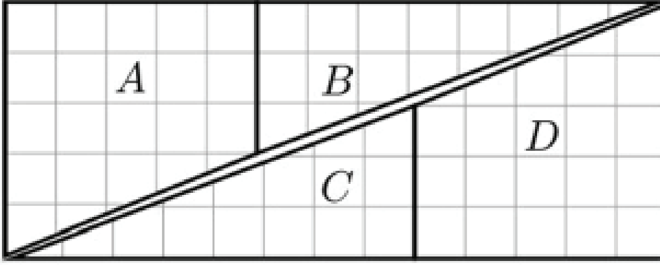
Geometrik Sihir

Bu bölümü, aynen başladığımız gibi, geometri temelli bir sihirbazlık numarası ile bitirelim. Pisagor teoreminin birçok kanıtı, geometrik bir şeklin parçalara ayrılıp alanı aynı olan farklı gözüken geometrik bir şekil elde edilmesine dayanır. Ancak şöyle bir paradoks da var: aşağıdaki gibi 8 × 8'lik bir kare ile başlayıp bunu öyle dört parçaya ayırabilir ki (bu arada bu parçaların kenarları Fibonacci sayıları olan 3, 5 ve 8!) bu parçaları bir şekilde tekrar birleştirerek 5 × 13'lük bir dikdörtgen oluşturabiliyoruz. (Kendiniz bir deneyin!) Ancak bunun imkansız olması gerekiyor, çünkü ilk şeklin alanı 8 × 8 = 64, ama ikinci şeklin alanı 5 × 13 = 65. Nasıl olabilir ki?



Alanı 64 olan kare parçalanıp yeniden monte ederek alanı 65 olan bir dikdörtgene dönüştürülebilir mi?

Bu paradoksun sırrı 5 × 13'lük dikdörtgenin köşegeninin aslında "düz" olmamasında saklıdır. Örneğin, C ile isimlendirilmiş üçgenin hipotenüsünün eğimi 3/8 = 0,375 oluyor (y-koordinatı 3 artarken, x-koordinatının 8 artmasından dolayı), oysa ki D ile isimlendirilmiş şeklin (bir *yamuk*) eğimi 2/5 = 0,4 (çünkü y-koordinatı 2 artarken x-koordinatı 5 artıyor). Bu eğimler birbirlerinden farklı olduğu için bu düz bir çizgi olamaz. Aynı uyumsuz durum üst kısımda kalan yamuk ve üçgen için de geçerlidir. Yani, eğer dikdörtgene yakından bakarsak, bir sonraki şekilde gözüktüğü gibi, iki "köşegenimsi" çizgi arasında ufacık bir boşluk görebiliriz. Bu boşluk aslında 1 birimlik alanın uzun bir bölgeye yayılmış halidir.



Bir birim ekstra alana sahip dikdörtgen köşegen boyunca uzanıyor

Bu bölümde, hepsini düz çigilerle oluşturduğumuz üçgenler, kareler, dikdörtgenler ve diğer çokgenler ile ilgili birçok mühim özellik türettik. Çemberlerin ve diğer eğri cisimlerin özelliklerini incelemek için daha komplike geometrik fikirlere, trigonometri ve kalkülüse ihtiyacımız var, bunların hepsi de büyülü π sayısına bağlı!

SEKİZİNCİ BÖLÜM

3. 1415926535**8**9...

π Sayısının Sihri

Dairesel Muhakeme

Bir önceki bölüme geometrik hislerinizin duyarlılığını test etmek için üçgenler ve dikdörtgenlerle alakalı birtakım problemlerle başlamıştık ve bölümü bir amerikan futbol sahasının iki kalesini iple birleştirmeyle alakalı bir problemle bitirmiştik. Bu bölümde çemberlere odaklanacağız, şimdi Dünya'nın çevresine ip gereceğimiz bir problemle başlıyoruz!

Soru 1. Diyelim ki ekvator üzerinden Dünya'nın çevresini dolanarak bir ipi iyice gerdik (yaklaşık 40000 km uzunluğunda). İpin iki ucunu bağlamadan önce, 3 metre ip daha ekliyoruz ve sonra düğüm atıyoruz. Sonra ekvator boyunca yüksekliği aynı olmak üzere, her noktadan bu ipi havaya kaldırıyoruz. İpin yerden yüksekliği ne kadar olur?



A) 1 cm uzunluğundan daha az.

B) Altından sürünebilecek kadar.

C) Altından yürüyebilecek kadar.

D) Altından kamyonla geçebilecek kadar.

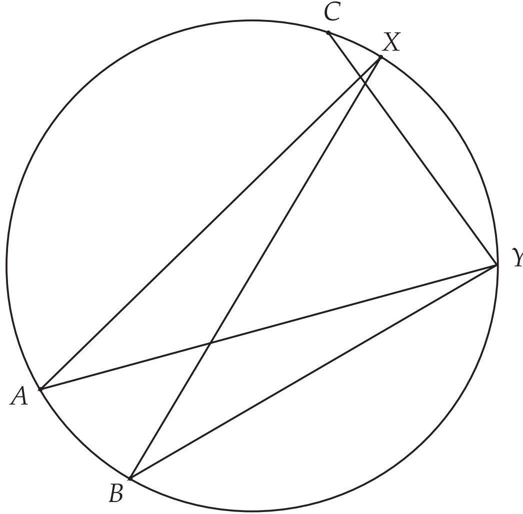
Soru 2. Aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi bir çember üzerinde X ve Y ile adlandırılmış iki tane sabit nokta alalım. X ve Y noktalarını birleştiren çember yayı (küçük olan değil büyük olan yay) üzerinde bir Z noktası seçmek istiyoruz. ∠XZY açısını maksimize edebilmek için Z noktası nerede olmalı?

A) *A* noktası (*X* ve *Y* noktalarının ortasının tam karşısı).

B) *B* noktası (*X* noktasının çemberin merkezine göre simetriği).

C) *C* noktası (*X* noktasına olabildiğince yakın).

D) Farketmez. Bütün noktalar aynı açı ölçüsünü verecektir.



X ve Y noktaları arasındaki büyük yayın hangi noktası en büyük açıyı verir? ∠XAY, ∠XBY, ∠XCY açılarından biri mi, yoksa bütün noktalar aynı açıyı mı verir?

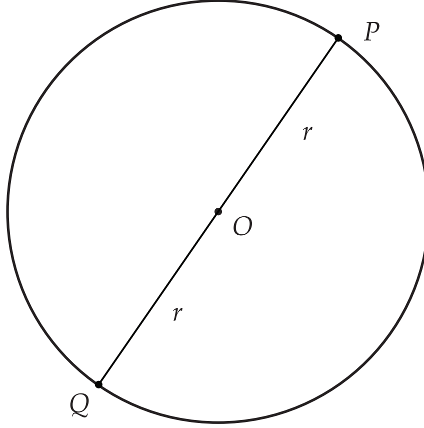
Bu soruları cevaplandırabilmek için çemberler konusunda ufkumuzu genişletmemiz gerekiyor. (Yani, sanıyorum doğru cevapları öğrenmek için ufkunuza pek ihtiyacınız yok. Doğru cevaplar sırasıyla B ve D. Ancak neden böyle olduğunu kavrayabilmek için, çemberleri iyi anlamalıyız.) Bir çember, bir *O* noktası ve pozitif bir *r* sayısı ile tarif edilebilir öyle ki bir sonraki şekilde de gösterildiği gibi, çember üzerindeki her noktanın *O* noktasına mesafesi *r* sayısı kadardır. *O* noktasına çemberin *merkezi* denir. *r* mesafesine de çemberin yarıçap uzunluğu (ya da kısaca yarıçap) denir. Matematiksel kolaylık için *O* noktasından çember üzerindeki herhangi bir P noktasına uzanan $\overline{OP}$ doğru parçası da yarıçap olarak adlandırılır.

Çevre ve Alan

Herhangi bir çember için, *çemberin çapı* (D ile gösterilir) yarıçapının iki katı kadardır ve aynı zamanda çember genişliğindeki mesafedir. Yani:

$$D = 2r$$

olur.



O merkezli, *r* yarıçaplı ve *D* = 2*r* çaplı bir çember

Çemberin sınırları boyunca uzanan mesafeye çemberin *çevresi* denir ve C harfi ile gösterilir. Çemberin şekline bakarak C sayısının $2D$ sayısından büyük olduğu görülebilir, çünkü P ile Q arasındaki mesafe de Q ile P arasındaki mesafe de D sayısından büyük. Bunun sonucunda da $C > 2D$ olur. Eğer yeterince dikkatli bakarsanız C sayısının $3D$'den büyük olduğuna bile ikna olabilirsiniz. (Ama kesin emin olmak için 3D gözlük gerekebilir. Pardon.)

Eğer ki etrafını dairesel bir cismin çapını ve çevresini birbirleriyle kıyaslamak istiyorsanız cismin etrafını bir iple sarabilirsiniz. Sonra bu ipin uzunluğunu çapın uzunluğuna bölersiniz. Madeni bir parayı, bir şişenin altını, bir tabağı ya da devasa bir çemberi ölçmeniz farketmez, hepsinde bulacağınız şey:

$$C/D \approx 3.14.$$

Bu π ("pi" diye okunur, Yunanca'da "p" sesini vermek için kullanılan bir harftir.) sayısını tamı tamına bir çemberin çevre uzunluğunun çapına oranı olan sabit sayı olarak tanımlıyoruz. Yani,

$$\pi = C/D$$

ve bu π her çember için aynı! Ya da eğer o şekilde tercih ediyorsanız, bunu bir çemberin çevresini veren bir formül olarak da yazabilirsiniz: D uzunluğunda bir çapa ya da r uzunluğunda bir yarıçapa sahip bir çember için;

$$C = \pi D$$

ya da

$$C = 2\pi r$$

olur.

π sayısının basamakları şu şekildedir:

$$\pi = 3.14159...$$

Bölümün ilerleyen kısımlarında π sayısının daha fazla basamağını verip birtakım sayısal özelliklerinden de bahsedeceğiz.

KOYU MATEMATİK

Enteresan bir şekilde insan gözü dairesel mesafeleri tahmin etmekte pek iyi değil. Örneğin, bir su bardağı alın. Sizce boyu mu daha büyüktür yoksa çevre uzunluğu mu? Birçok kişi boyunun daha büyük olduğunu düşünecektir ama genelde çevresi daha büyüktür. İnanmıyorsanız, başparmağınızı ve işaret parmağınızı bardağın üstüne karşılıklı olarak yerleştirip, çap uzunluğunu yaklaşık olarak bulun. Büyük bir ihtimalle, bardağın boyunun 3 tane çap boyundan daha kısa olduğunu farkedeceksiniz.

Şimdi bölüm başında verdiğimiz ilk soruyu cevaplayabiliriz. Dünyanın ekvatorunu çevresi 40000 km olan tam bir çember olarak düşünürsek, yarıçapını hesaplayabiliriz:

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{40000}{6.28} \approx 63000\ km$$

Ama aslında bu soruyu cevaplamak için yarıçap uzunluğunu bilmemize gerek yok. Sadece çevreyi 3 metre arttırmamız yarıçapı nasıl etkiler onu bilmemiz gerekiyor. Çevre uzunluğuna 3 metre daha eklemek yarıçapı birazcık daha büyük bir çember elde etmek demektir, bu yarıçaptaki değişim tam olarak $3/2\pi \approx 0.47$ metre olur. Yani alttan sürünerek geçilebilecek kadar yükseklikte olacaktır (ama yürüyerek geçilemez, tabii

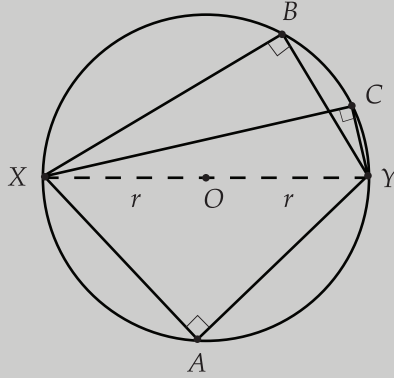
eğer çok özel dans stilleriniz yoksa!) Bu soruda şaşırtıcı olan 0.47 metre cevabının Dünya'nın çevre uzunluğuyla hiçbir alakasının olmamasıdır. Başka herhangi bir gezegen için de ya da herhangi büyüklükte bir top için de aynı cevabı bulurduk! Örneğin, eğer elimizde çevre uzunluğu 30 metre olan bir çember varsa, bunun yarıçapı $30/(2\pi) \approx 4.77$ metre olur. Eğer çevre uzunluğunu 3 metre daha arttırırsak, o zaman yeni yarıçapımız $33/(2\pi) \approx 5.25$ ve bu da yaklaşık 0.47 metre daha uzundur.

KOYU MATEMATİK

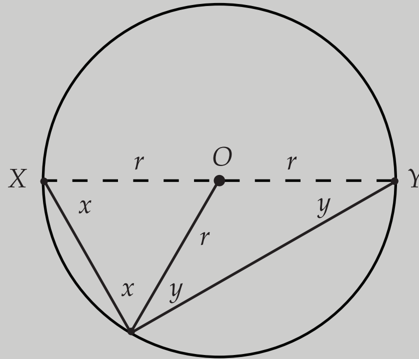
Şimdi çemberler hakkında bir başka önemli unsur:

Teorem: X ve Y noktaları bir çember üzerinde karşı karşıya iki tane nokta olsun. Çember üzerinde başka herhangi bir P noktası için $\angle XPY = 90°$ olur.

Örneğin aşağıdaki şekilde, $\angle XAY$, $\angle XBY$ ve $\angle XCY$ açılarının hepsi dik açıdır.



Kanıt: Merkez olan O noktasından P noktasına uzanan yarıçapı çizelim. $\angle XPO = x$ ve $\angle YPO = y$ olarak isimlendirelim. $x + y = 90°$ olduğunu göstermek istiyoruz.





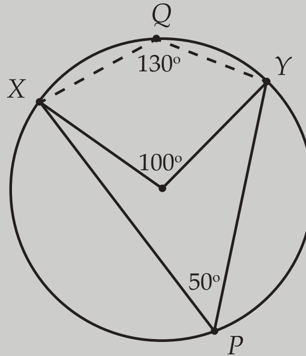
KOYU MATEMATİK

$\overline{OX}$ ve $\overline{OP}$ doğru parçaları birer yarıçap olduklarından, herbirinin uzunluğu r olur, ve dolayısıyla *XPO* üçgeni ikizkenardır. İkizkenar üçgen teoreminden dolayı $\angle \text{OXP} = \angle \text{XPO} = x$ olur. Benzer bir şekilde, $\overline{OY}$ doğru parçası da yarıçaptır ve $\angle \text{OYP} = \angle \text{YPO} = y$ olur. ΔXYP üçgeninin iç açıları toplamı 180° olmak zorunda olduğundan $2x + 2y = 180°$ eşitliğini elde ederiz ve dolayısıyla istediğimiz üzere $x + y = 90$ olur. ☺

Bu teorem benim geometride en sevdiğim teoremlerden birinin özel bir durumudur: *Merkez açı teoremin*i bir sonraki köşede inceleyeceğiz.

KOYU MATEMATİK

Bölümün başında sorduğumuz ikinci sorunun cevabı *merkez açı teoremi* ile birlikte ortaya çıkacak. *X* ve *Y* noktaları bir çember üzerinde herhangi iki nokta olsun. *Büyük (majör) yay X* ve *Y* noktalarını birleştiren iki yaydan uzun olanıdır. Kısa olanına da küçük (minör) yay adı verilir. Merkez açı teoremi diyor ki, $\angle \text{XPY}$ açısı *X* ve *Y* arasından majör yay üzerindeki herhangi bir *P* noktası için *aynı* olur. Tam olarak, $\angle \text{XPY}$ açısı *merkez açı* olan $\angle \text{XOY}$ açısının *yarısı* olur. Eğer *Q* noktası *X* ve *Y* noktaları arasındaki minör yay üzerinde bir noktaysa o zaman $\angle \text{XQY} = 180° - \angle \text{XPY}$ olur.



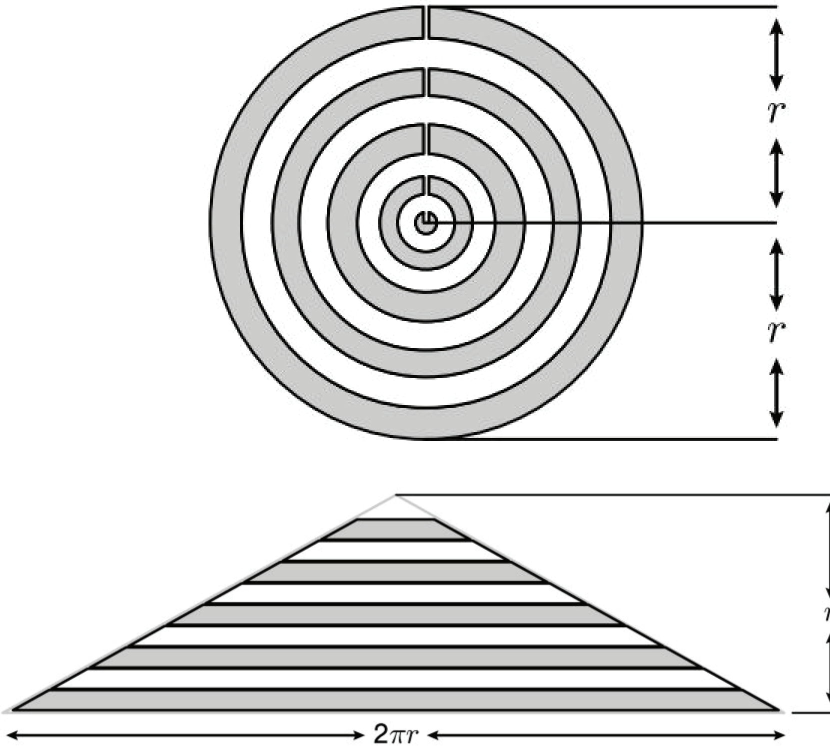
Mesela, eğer $\angle \text{XOY} = 100°$ ise, o zaman *X* ile *Y* arasındaki majör yay üzerindeki her *P* noktası için $\angle \text{XPY} = 50°$ olur, *X* ve *Y* arasındaki minör yay üzerindeki her *Q* noktası için $\angle \text{XQY} = 130°$ olur.

Çemberin çevre uzunluğunu biliyorsanız eğer, alanını veren pek mühim formülü de bundan yola çıkarak bulabilirsiniz.

Teorem: Yarıçap *r* uzunluğu olan bir çemberin alanı πr^2 olur.

Bu belki de okuldayken ezberlemek zorunda kaldığınız bir başka formüldü ama bunun neden doğru olduğunu anlamak çok hoş olan bir duygudur. Mükemmel titizlikte bir kanıt kalkülüs hesabı gerektirmektedir, ama buna ihtiyaç duymadan gayet tatmin edici bir argüman sunabiliriz:

Kanıt 1: Bir sonraki şekilde de gösterildiği gibi, bir çemberi iç içe geçirilmiş birçok halkanın birleşimi olarak görelim. Şimdi bu çemberi şekilde de gösterildiği gibi tepeden merkezine doğru keselim, sonra da halkaları düzleştirip bir üçgen oluşturacak şekilde üst üste dizelim. Oluşturduğumuz bu üçgenimsi cismin alanı nedir?



Yarıçap uzunluğu *r* olan bir çemberin alanı πr^2 olur

Taban uzunluğu b ve yüksekliği h olan bir üçgenin $\frac{1}{2}bh$ alanı olur. Oluşturduğumuz bu üçgenimsi şeklin taban alanı $2\pi r$ (ki bu en büyük çemberin çevre uzunluğudur) ve yüksekliği de r (çemberin tepe noktasından merkezine kadar olan mesafe) oluyor. Bu şekilde soyulmuş bir çember halka sayısı arttıkça daha da üçgensel bir şekle bürüneceği için, tam da istediğimiz gibi çemberin alanı

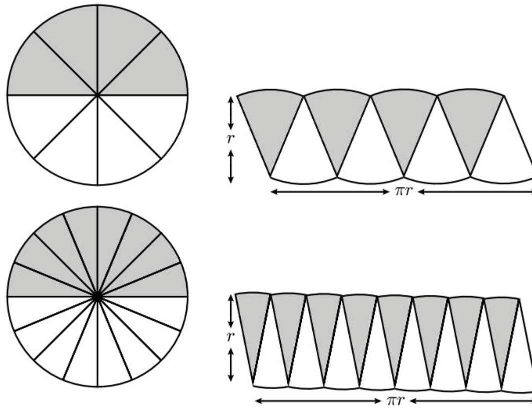
$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2$$

olacaktır.

Bu kadar hoş bir teoremi iki kez kanıtlamalıyız! Bir önceki kanıtta çembere soğan muamelesi yaptık. Şimdi de pizza muamelesi yapacağız.

Kanıt 2: Bir çemberi aynı büyüklükte çok sayıda dilime bölelim, sonra çemberin üst yarısındaki dilimlerle alt yarısındaki dilimleri birbirlerinden ayıralım ve örer gibi birbirlerine birleştirelim. Bir sonraki sayfada bunu önce sekiz dilimle sonra da on altı dilimle şekillendirdik.

Toplam dilim sayısı arttıkça, dilimler üçgene daha çok benzeyecektir. Çemberin altından aldığımız üçgenleri sıra sıra üstünden aldığımız üçgenlerle birbirlerine geçirince (halı desenlerine benzer bir şekilde) yüksekliği h ve genişliği de çemberin yarı çevresi, yani πr, uzunluğunda dikdörtgenimsi (neredeyse bir dikdörtgen) bir cisim elde ederiz. (Bunu paralelkenardan ziyade dikdörtgene daha da benzetmek için, en soldaki deseni tam ortadan ikiye keserek bir parçasını en sağa taşıyabiliriz.)



Bir başka yöntemle (pizza yöntemi?) alanın πr^2 olduğunun kanıtı.

Dilim sayısını arttırdığımız sürece bu dilimlenmiş çember giderek daha da çok dikdörtgene benzeyeceği için, tam da tahmin ettiğimiz gibi, alanı:

olur.

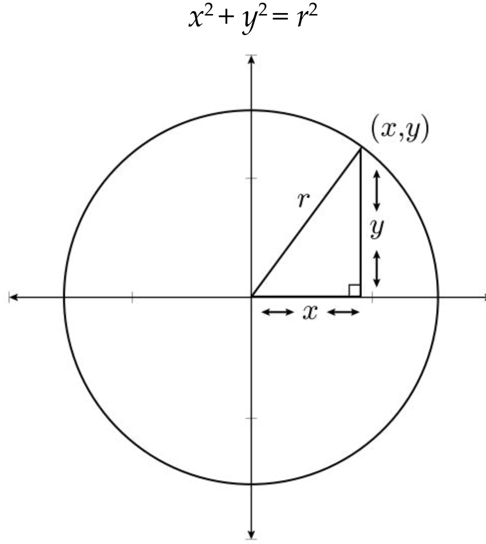
$$bh = (\pi r)\,(r) = \pi r^2$$ ☺

Sıklıkla çemberin grafiğini düzlem üzerinde resmetmeye ihtiyaç duyarız. Bunun için gerekli denklem, merkezi ve (0, 0) yarıçap uzunluğu olan bir çember için

$$x^2 + y^2 = r^2$$

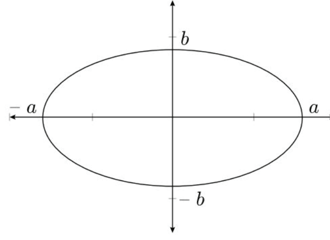
denklemidir, bir sonraki grafikte görebilirsiniz. Bunun neden böyle olduğunu görmek için bu çember üzerinde herhangi bir (x, y) noktası alalım ve dik kenarlarının uzunlukları x ve y, hipotenüs uzunluğu da r olan dik üçgeni çizelim. O zaman Pisagor teoreminin direkt sonucu olarak:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Yarıçap uzunluğu r merkezi (0,0) olan çemberin formülü $x^2 + y^2 = r^2$ ve alanı πr^2 olur.

$r = 1$ olduğu zaman, üstteki çembere *birim çember* denir. Birim çemberi yatay düzlemde bir a katsayısı ve dikey düzlemde de bir b katsayısı ile "esnetirsek" bir elips elde ederiz, aşağıdaki gibi:



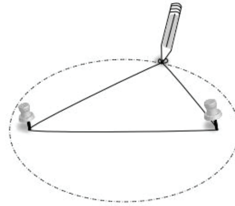
Bir elipsin alan formülü πab olur.

Böyle bir elipsin formülü:

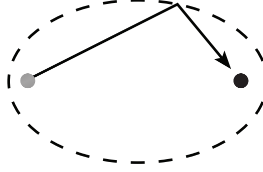
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ve alanı πab olur, bu da oldukça anlaşılır bir şey, çünkü birim çemberin alanı π ve bu alan ab sayısı ile esnetiliyor. $a = b = r$ olduğu zaman yarıçap uzunluğu r olan bir çember elde ettiğimize ve πab formülünün bize tam olarak πr^2 değerini verdiğine dikkat edelim.

Şimdi elips hakkında bir iki eğlenceli bilgi: İki raptiye, bir düğümlenmiş bir ip parçası ve bir kalemle elips çizebilirsiniz. Raptiyeleri bir kağıt ya da karton üzerine tutturun, ipi de raptiyelerin etrafına dolayın ama biraz bol olsun. Kalemi ipin bir iç bölgesinde bir yere koyun ve kalemle ipi gererek bir üçgen oluşturun, bir sonraki şeklimizde nasıl olduğunu görebilirsiniz. Sonra kalemi ipi hep gergin tutarak raptiyelerin etrafında gezdirin. Sonuçta oluşan şekil bir elips olacaktır.



Buradaki raptiyelerin konumlarına elipsin *odak noktaları* denir ve bunların şöyle fevkalade bir özelliği vardır: Bir misket ya da bilardo topu alıp ve bunu bir odak noktasına koyarsanız ve sonra da topu herhangi bir doğrultuda iterseniz, elipsin kenarından bir kere sektikten sonra direkt ikinci odak noktasına yönlenecektir.



Gezegenler ve kuyruklu yıldızlar gibi gök cisimleri güneş etrafında elips şeklinde bir yörüngede hareket ederler. Şu iki mısrayı yazmadan yapamayacağım:

Tutulmalar bile

Elipssiz yapamaz!

KOYU MATEMATİK

Enteresan bir şekilde, bir elipsin çevre uzunluğunu veren basit bir formül yok. Ama matematik dahisi Srinivasa Ramanujan (1887-1920) nefis bir yaklaşım veren şu formülü saptamıştır. Yukarıda tarif edildiği gibi, bir elipsin çevre uzunluğu yaklaşık olarak:

$$\pi(3a + 3b - \sqrt{(3a + b)(3b+a)})$$

kadardır. $a = b = r$ olduğu zaman, bu formül $\pi(6r - \sqrt{16r^2}) = 2\pi r$ değerine dönüştüğüne dikkat edelim, ki bu da çemberin çevre uzunluğudur.

π sayısı 3-boyutlu cisimlerde de karşımıza çıkıyor. Bir *silindir* düşünelim, mesela bir meşrubat kutusu gibi. Yarıçap uzunluğu r ve yüksekliği h olan böyle bir silindirin hacmi (bu değer şeklin ne kadar yer kapladığını ölçer).

$$V_{\text{silindir}} = \pi r^2 h$$

olur. Düşününce bu formül mantıklı geliyor çünkü bir *silindiri alanı* πr^2 olan çemberlerin h yükseliğine ulaşıncaya kadar üst üste yığılmış hali (mesela bir kafede, bardak altlıklarının yığını gibi) olarak düşünebiliriz.

Peki silindirin *yüzey alanı* nedir? Başka bir deyişle, alt kısmı ve üst kısmı da dahil olmak üzere dış cephesini boyamak için ne kadar boyaya ihtiyacımız vardır? Bu formülü ezberlemenize hiç gerek yok, çünkü silindiri üç parçaya ayırarak cevabı çıkarabilirsiniz. Üst ve alt kısımların herbirinin alanı πr^2 olacaktır, yani toplam yüzey alanına $2\pi r^2$ kadar katkıda bulu-

nacaklar. Geri kalan kısım için silindiri en üstten alta kadar düz bir çizgi izleyerek kesin ve elde ettiğiniz cismi düzleştirin. Sonuçta yüksekliği h ve taban uzunluğu da $2\pi r$, çünkü bu tabandaki çemberin çevre uzunluğu, olan bir dikdörtgen olacaktır. Dikdörtgenin alanı $2\pi rh$ olduğundan, silindirin toplam yüzey alanı

$$A_{\text{silindir}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

olur.

Bir küre, üzerindeki herhangi bir noktanın merkezine olan uzaklığı sabit olan üç boyutlu bir cisimdir. Peki yarıçap uzunluğu r olan bir kürenin hacmi ne kadardır? Böyle bir küre, yarıçap uzunluğu r olan ve yüksekliği de $2r$ olan bir silindirin içine sığacaktır, yani hacmi $\pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$ değerinden daha az olmalıdır. Şansa bakın ki (kalkülüse de bakın), bir küre bu alanın tam olarak üçte ikisini kaplamaktadır. Başka bir deyişle, bir kürenin hacmi

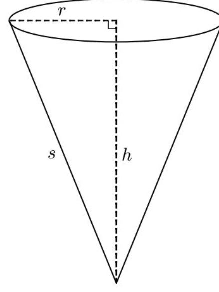
$$V_{\text{küre}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olur.

Bir kürenin yüzey alanı ise bulması ise hiç de kolay olmayan kolay bir formüldür:

$$A_{\text{küre}} = 4\pi r^2.$$

Bu kısmı π sayısının gözüktüğü dondurma ve pizza örnekleriyle sonlandıralım. Yüksekliği h olan bir dondurma külahı düşünelim, en üstteki çemberin yarıçapı da r olsun. Külahın en ucundan çemberin herhangi bir noktasına olan düz mesafeye de yan yükseklik diyelim ve s ile ifade edelim, aşağıdaki şekilde görebilirsiniz. (s değerini Pisagor teoremini kullanarak hesaplayabiliriz: $h^2 + r^2 = s^2$)



Bir külahın hacmi $\pi r^2 h/3$ ve yüzey alanı da πrs olur.

Böyle bir külah yarıçap uzunluğu r ve yüksekliği h olan olan bir silindirin içine sığabilir, yani külahın hacminin $\pi r^2 h$ değerinden küçük olması pek şaşırtıcı değil. Ama hacmin bu değerin tam olarak üçte biri olması şaşırtıcı (ve kalkülüs hesabı kullanmadan düşünürsek tamamen sezgilerimize ters bir durum). Başka bir deyişle,

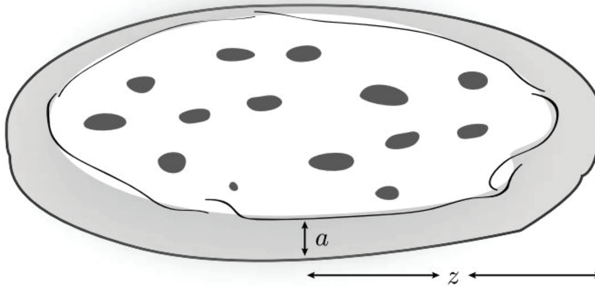
$$V_{\text{külah}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Yüzey alanını kalkülüs hesabı yapmadan da bulabiliriz aslında, ama bu formülü tüm sadeliği ve zarafetiyle sadece sergilemekle yetinelim. Bir külahın yüzey alanı:

$$A_{\text{külah}} = \pi rs$$

olur.

Son olarak, yarıçap uzunluğu z olan kalınlığı a olan bir pizza düşünelim, aşağıdaki şekilde de görülebileceği gibi, bunun hacmi ne kadardır?



Yarıçap uzunluğu z ve kalınlığı a olan bir pizzanın hacmi ne kadardır?

Bu pizzayı yarıçapı z ve yüksekliği a olan anormal şekilli bir silindir olarak düşünebiliriz, o zaman hacmi:

$$V= \pi z^2 a$$

olmak durumunda kalır.

Aslında cevap soru içinde gizli, bunca zamandır gözünüzün içine bakıyordu. Bu cevabı dikkatlice tane tane ifade edersek, şöyle bir şey elde ediyoruz:

$$V= pi\ z\ z\ a.$$

π sayısının belirdiği bazı ilginç durumlar

π sayısını yukarıdaki durumlarda da gördüğümüz gibi dairesel cisimlerin alan ve çevre hesaplarında görmek çok şaşırtıcı değil. Ancak π sayısı matematiğin sanki oraya ait olmaması gerekir gibi gözüken birçok alanında karşımıza çıkıyor. Örneğin $n!$ değerini ele alalım, bunu 4. Bölüm'de de incelemiştik. Bu sayıyla ilgili dairesel bir durum söz konusu değil. Genelde birtakım belirli çoklukları saymak için kullanılır. Bu sayının çok hızlı bir şekilde büyüdüğünü biliyoruz ancak $n!$ sayısını hesaplayabilmek için verimli bir kısayol bilinmiyor. Mesela, 100000! sayısını hesaplamak için en az binlerce kez çarpma işlemi yapmamız gerekiyor. Ama yine de *Stirling Yaklaşımı*nı kullanarak $n!$ sayısını yaklaşık olarak bulmanın pek yararlı bir yöntemi var, o da:

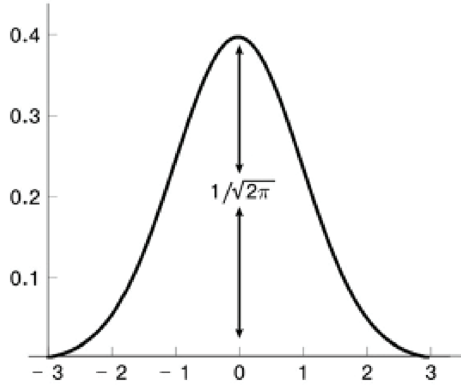
$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

ve buradaki $e = 2.71828\ldots$ (bu da diğer bir pek mühim irrasyonel sayıdır ve bundan 10. Bölüm'de bahsedeceğiz). Mesela, bir bilgisayar yardımıyla $64! = 1.269 \times 10^{89}$ olarak 64! değerini en önemli dört basamağına kadar hesaplayabiliyoruz. Stirling yaklaşımı ise bize,

$$64! \approx (64/e)^{64} \sqrt{128\pi} \approx 1.267\times 10^{89}$$

değerini veriyor. (Bir sayının 64. kuvvetini bulmanın bir kısa yolu var mı? Evet! $64 = 2^6$ olduğundan, $64/e$ ile başlayın ve bunun altı kez karesini alın)

Pek ünlü *çan eğrisinin*, aşağıda gösteriliyor (istatistik biliminde çok kez belirir ve bütün deneysel bilimlerde de) yüksekliği $1/\sqrt{2\pi}$ oluyor. 10. Bölüm'de bu eğriden daha çok bahsedeceğiz.



Çan eğrisinin yüksekliği $1/\sqrt{2\pi}$ olur

π sayısı sonsuz toplam formüllerinde de sıkça kendini gösterir. İlk kez Leonhard Euler tarafından gösterilmiştir ki eğer pozitif sayıların terslerinin karelerini toplarsak:

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \cdots = \pi^2/6$$

elde ederiz. Eğer yukarıdaki herbir terimin karelerini alırsak, bu terslerin dördüncü kuvvetlerinin toplamı olur, o da:

$$1 + 1/16 + 1/81 + 1/256 + 1/625 + \cdots = \pi^4/90$$

olur. Aslında, her $2k$ çift kuvvetler için bu terslerin toplamlarının formülleri vardır, π^{2k} sayısının bir rasyonel katıyla verilen çözümlemeler sunar.

Peki ya terslerin tek kuvvetleri? 12. Bölüm'de, pozitif sayılarının terslerinin toplamının sonsuz olduğunu göreceğiz. 1'den büyük tek sayı kuvvetleri için, mesela terslerin küplerinin toplamı

$$1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + 1/125 + \cdots = \ ???$$

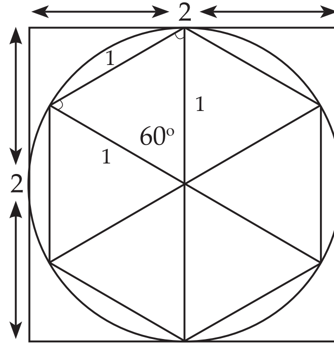
sonlu bir toplamdır, ama kimse bu toplamı veren basit bir formül bulamadı.

Paradoksal bir şekilde, π sayısı olasılık ile alakalı problemlerde de ortaya çıkıyor. Örneğin, eğer rastgele bir şekilde iki tane büyük sayı seçerseniz, ortak bir asal çarpana sahip olmama olasılıkları yüzde 60'dan biraz fazladır. Tam olarak bu olasılık $6/\pi^2 = 0.607...$ oluyor. Bu sayının, az önce verdiğimiz karelerin terslerinin sonsuz toplamına tıpatıp benzemesi bir tesadüf değildir.

π'nin basamakları

Kendi kendinize yapabileceğiniz dikkatli bir iki ölçümle π sayısının 3'den birazcık büyük olduğunu deneyerek bulabilirsiniz. Bu noktada çok doğal iki soru karşımıza çıkıyor. Herhangi fiziksel bir ölçüm yapmadan π sayısının 3 civarında olduğunu kanıtlayabilir misiniz? Ve π sayısı için basit bir kesir ya da bir formül var mıdır?

İlk soruyu yarıçap uzunluğu 1 olan bir çember çizerek cevaplayabiliriz, bu çemberin alanının $\pi 1^2 = \pi$ olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki şekilde, kenar uzunluğu 2 olan ve çemberi tamamen kapsayan bir kare çizdik. Çemberin alanı karenin alanından daha küçük olmak zorunda olduğundan, $\pi < 4$ olduğunu kanıtlamış oluyoruz.



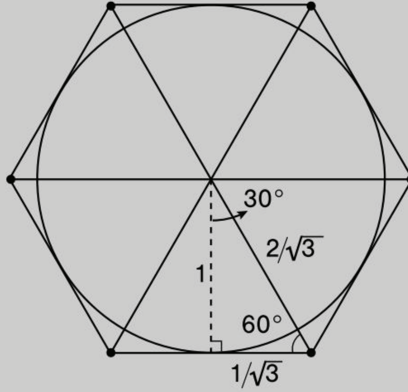
3 < π < 4 olduğunun geometrik bir kanıtı

Öte yandan, çember aynı zamanda bir (düzgün) altıgen içeriyor. Bu çember içine çizilmiş altıgenin çevre uzunluğu nedir? Bu altıgen 6 tane üçgene bölünebilir ve herbirinin merkez açısı 360°/6 = 60° olur. Her üçgenin iki kenarı, uzunlukları 1 olan birer yarıçap oluyor, yani bu üçgenler ikizkenardır. İkizkenar üçgen teoremine göre, diğer iki açı birbirlerine eşit ve dolayısıyla onlar da 60° olmak durumunda. Yani bütün üçgenler kenar uzunlukları 1 olan eşkenar üçgenlerdir. O zaman bu altıgenin çevresi 6 olur, o da çemberin çevre uzunluğu olan 2π değerinden daha küçük olur. Yani $6 < 2\pi$ ve böylece $\pi > 3$. Bulduklarımızı beraber yazarsak şu eşitsizlikleri elde ediyoruz:

$$3 < \pi < 4$$

KOYU MATEMATİK

Daha fazla kenar sayısına sahip çokgenler kullanarak π sayısını daha küçük bir aralıkla sınırlandırabiliriz. Örneğin, çemberi bir kare yerine bir altıgenle çevrelersek, $\pi < 2\sqrt{3} = 3.46...$ olduğunu kanıtlayabiliriz.



Yine bu altıgeni 6 tane eşkenar üçgene bölelim. Herbir eşkenar üçgen orta dikmeyi çizersek birbirleriyle eş iki tane dik üçgene ayrılabilir. Eğer dik kenarlardan kısa olanına x dersek o zaman hipotenüs uzunluğu $2x$ olur ve Pisagor teoreminden dolayı $x^2 + 1 = (2x)^2$ olur. Bu denklemi çözersek $x = 1/\sqrt{3}$ elde ederiz. Sonuç olarak altıgenin çevre uzunluğunu $12/\sqrt{3}$ olarak buluruz ve bu değer çemberin çevre uzunluğu olan 2π'den büyük olmasından dolayı $\pi < 2\sqrt{3}$ olur. (Enteresan bir şekilde, çemberin alanını altıgenin alanıyla kıyasladığımızda da aynı sonuca ulaşıyoruz.)

Antik Yunan matematikçi Arşimet (MÖ 287 – 212), bu hesaplamalara benzer olarak 12, 24, 48 ve 96 kenarlı çokgenleri çizerek $3{,}14103 < \pi < 3{,}14271$ aralığına ve daha basit gözüken şu eşitsizliğe ulaşmıştır:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

π sayısını kesirlerle yaklaşık olarak ifade etmenin birçok farklı yolu vardır. Örneğin;

$$\frac{314}{100} = 3.14 \qquad \frac{22}{7} = 3.\overline{142857} \qquad \frac{355}{113} = 3.14159292\cdots$$

Son kesirli ifadeyi özellikle seviyorum: π sayısını altıncı basamağa kadar doğru bir şekilde vermesinin yanında, ilk üç tek sayıyı ikişer kez kullanıyor: iki tane 1, iki tane 3 ve iki tane de 5!

Doğal olarak, π sayısını tam olarak veren bir kesirli sayı (tabii payının ve paydasının ikisinin de tamsayı olduğu, yoksa π=π/1 yazarız) bulmak çok ilginç olurdu. 1768 yılında, Johann Heinrich Lambert π sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlayarak böyle bir sayı aramanın boş bir uğraş olduğunu göstermiştir. Belki de kareköklü ya da küpköklü ifadeler kullanarak sade bir biçimde ifade edilebilir mi? Mesela, $\sqrt{10}$ = 3.162... bayağı yakın gözüküyor. Ancak 1882 yılında, Ferdinand von Lindemann π sayısının sadece irrasyonel bir sayıdan ibaret olmadığını kanıtlamıştır. *Aşkın bir sayıdır,* bu da π sayısının tamsayı katsayılı hiçbir polinomun bir kökü olamayacağı anlamına gelir. Mesela, $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir ama aşkın bir sayı değildir, çünkü $x^2 - 2$ polinomunun bir köküdür.

π sayısı bir kesir olarak ifade edilemez ama kesirlerin toplamları ya da çarpımları olarak ifade edilebilir, yalnız sonsuz tane kullanmak şartı ile! Örneğin, 12. Bölüm'de de göreceğimiz üzere;

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)$$

Yukarıdaki formül çok güzel ve hayret verici ama yine de π sayısını hesaplamak için pek pratik değil. 300 terimden sonra bile π sayısına yine de 22/7 sayısından daha yaklaşmış olmuyoruz. İşte size bir başka müthiş formül olan *Wallis'in formülü*, burada π sayısı sonsuz bir çarpım olarak ifade ediliyor ama yine de yakınsaması çok uzun zaman alıyor.

$$\pi = 4\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\right)$$
$$= 4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdots$$

π (ve τ) Sayısını Anmak ve Ezberlemek

İnsanların hayranlığı sebebiyle ve süper bilgisayarların hızını ve duyarlılığını test etme methodu olmasıyla, π sayısının trilyonlarca basamağı hesaplanmıştır. Bu kadar basamak bilmeye kesinlikle ihtiyacımız yok. Sadece kırk basamakla gözlemlenebilir evrenin çevresini, en fazla bir hidrojen atomumun çapı kadar hata payıyla ölçebilirsiniz!

π sayısı kendine neredeyse bir tarikat oluşturmuştur. Birçok insan 14 Mart Pi Günü'nde (sayısal temsili 3/14 ile) π sayısını kutlamayı çok sever, ki bu gün aynı zamanda Albert Einstein'in de doğum günüdür. Tipik bir Pi Günü, hem gösteriş hem de tüketim amaçlı hazırlanmış matematiksel temalarla süslenmiş pastalar, Einstein kostümleri ve tabii ki π ezberleme yarışması içerir. Katılımcılar genellikle π'nin onlarca basamağını ezbere bilirler ve bu yarışmaların kazananının yüzlerce basamak ezberlemiş olması çok garip değildir. Bu arada, π sayısının basamaklarını ezberlemede güncel dünya rekoru Çin'den Chao Lu'ya aittir, kendisi 2005 yılında π'nin 67.890 basamağını ezberden okumuştur! *Guinnes Rekorlar Kitabı*'na göre, Lu bu kadar basamağa ulaşmak için dört yıl çalışmış ve bu basamakların hepsini ezberden okuması da yirmi dört saatten biraz fazla sürmüş.

İşte karşınızda π sayısının ilk 100 basamağı:

π = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375

105820974944592307816406286208998628034825342117067…

Yıllar içinde insanlar π'nin basamaklarını ezberlemek için yaratıcı yöntemler geliştirdiler. Bir yöntem her bir kelimenin π'nin bir sonraki basamağını veren uzunlukta olduğu cümleler kurmaktır. Örneğin; "Sen o yolu o kadar uçabildin mi?" cümlesinin kelimelerinin uzunlukları π sayısının yedi basamağını verir: 3,141592.

Etkileyici bir örnek 1995 yılında Mike Keith tarafından yazılmıştır; 740 basamağı verir ve aynı zamanda Edgar Allan Poe'nin "Kuzgun" adlı şiirinin bir parodisidir. Sıfır sayısı için 10 harfli kelimeler kullanılmıştır. Keith işi genişleterek, 3835 basamak veren "Cadaeic Cadenza" isimli eserini yazmıştır.

Ancak bu kelime uzunluğu metodunun ciddi bir problemi var. Cümleleri, şiirleri ya da hikayeleri ezberleyebilseniz bile, her bir kelimedeki harf sayısını hızlı bir şekilde belirlemek mümkün değil.

Benim sayı ezberlemek için en sevdiğim yöntem *fonetik kod* kullanan ana sistem adlı yöntemdir. Bu kodlamada her basamak bir ya da daha fazla ünsüz harfle temsil edilir. Mesela şöyle bir şey şekilde:

1 = *t* ya da *d*

2 = *n*

3 = *m*

4 = *r*

5 = l

6 = *j*

7 = *k* ya da *g*

8 = *f* ya da *v*

9 = *p* ya da *b*

0 = *s* ya da *z*

Bu sistemi ezberlemek için bile ayrı ayrı yöntemler var! Örneğin; 2 ve 3 sayılarının karşılığı olarak kullanılan *n* ve *m* harflerinin sırasıyla iki ve üç tane ayağı var. Bu kodları kullanarak ve ünlü harfleri de ekleyerek, sayıları kelimelere dönüştürebiliriz. Mesela 31 sayısı, ki bu sayı yukarıdaki kodlara göre *m* ve *t* (ya da *m* ve *d*) ünsüzlerini kullanıyor, şu şekilde kelimelere dönüştürülebilir:

31 = mete, mit, imdi, mide, madde, muta...

Burada "madde" kelimesinin de geçerli olduğuna dikkat edelim, çünkü *m* ve *d* sesleri sırasıyla telaffuz ediliyor ve bu yöntemde hecelemenin pek bir önemi yok.

Bu fonetik kod tarih, telefon numarası, kredi kartı numarası ve daha başka sayıları ezberlemek için çok faydalı bir yöntem. Siz de deneyin, biraz pratikten sonra, sayı ezberleme kabiliyetinizin ciddi bir şekilde arttığını göreceksiniz.

Hemen hemen bütün matematikçiler π sayısının matematikteki en önemli sayı olduğu konusunda hemfikirdir. Ancak π sayısını kullanan formüllere ve bunların uygulamalarına bakarsanız, göreceksiniz ki birçoğunda π sayısı 2 ile çarpılmış bir şekildedir. Yunanca'daki harf τ (tau) bu değeri temsil etmek için kullanılır:

$$\tau = 2\pi$$

Birçok kişi inanıyor ki; eğer zamanda geri gidebilseydik ve π sayısını değiştirebilseydik, matematiksel formülleri ve başlıca trigonometrik konseptleri π yerine τ kullanarak daha basit şekillerde ifade edebilirdik.

Bu fikirler şık ve eğlenceli bir şekilde Bob Palais tarafından "π Yanlıştır!" adlı makalesinde ve Michael Hartl tarafınfan "Tau Manifestosu" adlı makalesinde açıklanmıştır. Buradaki ana argüman, çemberlerin kendi yarıçapları temel alınarak tanımlanması ve bir çemberin çevresini yarıçapı ile kıyasladığımız zaman $C/r = 2\pi = \tau$ elde etmemiz. Bazı ders kitapları artık "τ-uyumlu" etiketiyle basılıyor, formüllerin hem π hem de τ kullanarak ifade edildiğini belirtmek için (Bu sabit sayıya geçiş yapmak o kadar kolay olmasa da, birçok öğrenci ve öğretmen τ sayısının π sayısından daha kolay olduğu görüşünde hemfikir olacaktır.). Bu akımın önümüzdeki onyıllarda nasıl gelişeceğini görmek enteresan olacak. τ sayısının destekçileri (kendilerine tauist derler) doğru olanın kendi tarafları olduğuna ciddi ciddi inanıyorlar, ancak geleneksel notasyona da toleranslı yaklaşıyorlar.

Şimdi τ sayısının ilk yüz basamağını aralarında boşluklar olacak şekilde vereceğiz. Dikkat edelim ki, τ sayısı 6 ve 28 sayıları ile başlıyor, bunların ikisi de mükemmel sayılar (6. Bölüm'de de gördüğümüz gibi). Peki bu tesadüf mü? Tabii ki. Ama eğlenceli bir tesadüf.

$$\tau = 6.283185\ 30717958\ 64769252\ 867665\ 5900576\ 839433\ 8798750$$

$$211641949\ 8891846\ 15632\ 812572417\ 99725606\ 9650684\ 234135\ldots$$

2012 yılında on üç yaşındaki Ethan Brown, bir bağış toplama projesi için τ sayısının 2012 basamağını ezberleyerek dünya rekoru kırmıştır. Bunun için fonetik kodu kullandı, ama uzun cümleler oluşturmak yerine görsel imgeler yarattı. Öyle ki her imge; bir konu, bir eylem ve eylemin uygulandığı bir obje içeriyordu. Bu imgeleri daha kolay hatırlamak için de, Brown hafıza sarayı isimli yöntemi benimsedi. Kendisini okulunda dolaşırken hayal ediyordu; bazı belli başlı koridorlara ve sınıflara üç-beş objeyi absürd bir şekilde yerleştirmişti ve bunları sırasıyla hayal ederek onlara denk gelen sayıları ezberlemişti. Sonunda, 60'dan fazla yere 272 tane objeyi yerleştirdi. 2012 tane basamağı ezberden okuyabilmek yaklaşık 4 ay hazırlık yapması gerekti, ve 73 dakikada ezbere okudu.

DOKUZUNCU BÖLÜM

$20^\circ = \pi/9$

Trigonometrinin Sihri

Trigonometrinin Tepe Noktası

Trigonometri, klasik geometri kullanarak çözemeyeceğimiz geometri problemlerini çözme imkânı sunar. Örnek olarak şu problemi ele alalım.

Soru: Sadece iletki ve basit bir hesap makinesi yardımıyla yakındaki bir dağın yüksekliğini belirlemeye çalışalım.

Bu problemin çözümü için *beş* farklı yöntem sunacağız. Bunların ilk üçü ise neredeyse hiç matematik gerektirmeyecek!

İlk metot (kaba kuvvet metodu): Dağın tepesine tırmanın ve hesap makinenizi dağdan aşağı fırlatın. (Bu hatırı sayılır bir güç gerektirebilir.) Hesap makinenizin yere çarptığı ana kadar geçen süreyi ölçün (ya da aşağıdan geçen bir dağcının bağrışlarını bekleyin). Geçen süre t saniye olsun, hava direncini, nihai hızı (terminal velocity) ihmal edersek, standart fizik denklemleri dağın yüksekliğinin yaklaşık olarak $16t^2$ feet (yaklaşık $5t^2$ metre) olduğunu söyler. Bu yöntemin dezavantajı, ihmal ettiğimiz hava direnci ve başlangıç hızı gayet önemli olabilir, bu arada hesap makineniz de zarar görebilir. Ayrıca zamanı tutmak için bir kronometreye ihtiyacınız olacaktır ve hesap makinenizin bu fonksiyonu varsa bile artık yararlanamayacaksınız. Metodun avantajı ise iletkiye ihtiyaç duymayacak olmanızdır.

İkinci metot (teyit (belki de teğet) metodu): Arkadaş canlısı bir izci bulup eğer size dağın yüksekliğini söylerse ona gıcır gıcır iletkinizi hediye edeceğinizi söyleyin. Ancak izci dağın gerçek yüksekliğini bilmiyor, sadece tahminini söylüyorsa, bu tahmini başka birisine daha teyit ettirmek cevabın güvenilirliğini arttıracaktır. Yani teyit metodu için, bir iletki ve dağ başında gezen iki yardımsevere ihtiyacınız olacak. Bu yöntemin avantajı yeni arkadaşlar edinme ihtimaliniz ve hesap makinesine boyun eğmeyecek olmanızdır. Eğer izcinin cevabına ve diğer kişinin teyidine güvenmiyorsanız hala dağa tırmanıp birinci metodu uygulama şansınız var. Bu metodun dezavantajı ise hem iletkiniz elinizden gidebilir hem de rüşvetçilikle suçlanabilirsiniz.

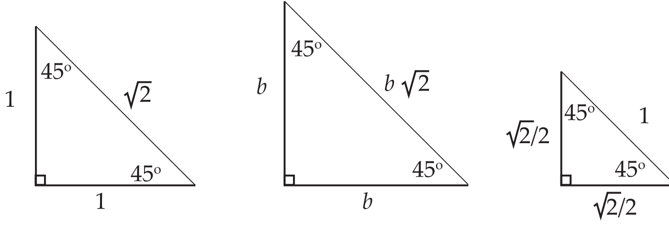
Üçüncü metot (sinüs metodu): İlk iki metoda girişmeden önce sağda solda dağın yüksekliğinin yazılı olduğu bir levha olup olmadığını kontrol edin. Tabi şansınız yaver gitmez ve hemen bulamazsanız, dert etmeyin, levha ararken geçen sürede yaptığınız spor sinüslerinizi açar, nefes alış verişiniz düzene girer. Bu metodun avantajı herhangi bir ekipmana ihtiyaç duymamanızdır.

Elbette ki bu üç metot da size hitap etmeyeceği için daha matematiksel çözümler önermek durumundayız. İşte bu bölümün asıl konusu da bu yöntemler olacaktır.

Trigonometri ve Üçgenler

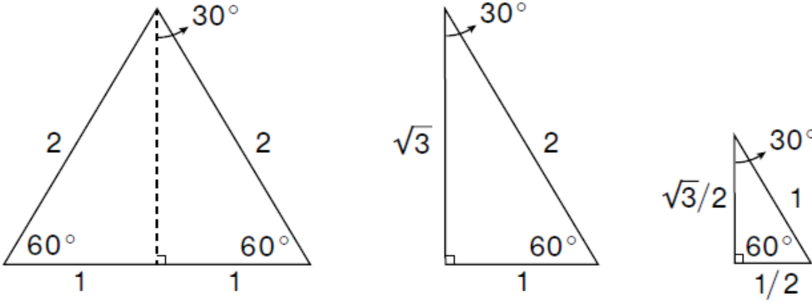
"Trigonometri" sözcüğü Yunanca kökenli olup tam olarak üçgen ölçümü anlamına gelen *trigon* ve *metria* sözcüklerinden türemiştir. Önce bazı özel üçgenlerin incelenmesiyle başlayalım.

İkizkenar dik üçgen. Bir ikizkenar dik üçgende bir açı 90° olup diğer iki açı birbirine eşittir. Dolayısıyla diğer açıların her biri 45° olur (iç açıların toplamı 180° olduğundan), böyle bir üçgeni 45-45-90 üçgeni olarak adlandıracağız. Eşit kenarların uzunlukları 1 birim ise, Pisagor teoreminden hipotenüsün uzunluğunun $\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}$ olduğu çıkar. Unutulmamalıdır ki aşağıda da gösterildiği üzere bütün ikizkenar dik üçgenlerin kenarlarında $1:1:\sqrt{2}$ oranı vardır.



Bir 45-45-90 üçgeninde kenarların oranı sırasyla $1 : 1 : \sqrt{2}$ dir.

30-60-90 üçgeni**.** *Bir eşkenar üçgenin* bütün kenarlarının uzunlukları birbirine eşittir, bütün açılarının ölçüleri altmışar derecedir. Eğer bir eşkenar üçgeni, aşağıda gösterildiği gibi, birbirine eş iki parçaya ayırırsak açılarının ölçüleri 30°, 60° ve 90° olan iki tane dik üçgen elde ederiz. Eğer başlangıçta aldığımız eşkenar üçgenin kenar uzunlukları 2 birim ise hipotenüsün uzunluğu 2 birim ve tabandaki kısa kenarın uzunluğu 1 birim olur. Pisagor teoreminden dik kenarlardan uzun olanı ise $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ birim bulunur. Aslında bütün 30-60-90 üçgenlerinin kenarları arasında $1 : \sqrt{3} : 2$ oranı vardır (aslında bu 1, 2, $\sqrt{3}$ şeklinde daha kolayca da ifade edilebilir). Özel olarak, eğer hipotenüsün uzunluğu 1 ise diğer kenarların uzunlukları $1/2$ ve $\sqrt{3}/2$ birimdir.



Bir 30-60-90 üçgeninde kenarların oranı sırasıyla $1 : \sqrt{3} : 2$ 'dir.

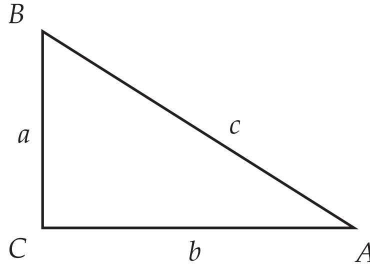
KOYU MATEMATİK

Eğer a, b, c pozitif tam sayıları $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlıyorsa (a, b, c) bir *Pisagor üçlüsü* olarak adlandırılır. Bunların en küçük ve en basit olanı (3, 4, 5) üçlüsüdür, ancak daha sonsuz çoklukta vardır. Elbette elinizdeki üçlüyü pozitif tam sayılarla çarpıp genişleterek (6, 8, 10), (9, 12, 15) veya (300, 400, 500) gibi yeni üçlüler elde edebilirsiniz, ama daha ilginç örnekler elde etmeye çalışalım. İşte size Pisagor üçlüleri elde etmek için zekice bir yöntem. $m > n$ olacak biçimde herhangi iki pozitif m ve n sayıları seçin. Şimdi

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

olsun. Dikkat ederseniz $a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$ olup $(m^2 + n^2)^2 = c^2$'dir, yani (a, b, c) bir Pisagor üçlüsüdür. Örneğin, $m = 2$, $n = 1$ sayıları (3, 4, 5) üçlüsünü üretir; $(m, n) = (3, 2)$ sayıları (5, 12, 13); $(m, n) = (4, 1)$ sayıları (15, 8, 17), $(m, n) = (10, 7)$ sayıları (51, 140, 149) üçlüsünü üretir. Burada asıl ilginç olan şey (herhangi bir sayılar teorisi dersinde ispat edilebilir) her bir Pisagor üçlüsü bu işlemlerle elde edilebilir.

Trigonometri konusu çok önemli iki fonksiyona dayanır, bunlar **sinüs** ve **kosinüs** fonksiyonlarıdır. Aşağıdaki gibi bir ABC dik üçgeni verilsin, c ile hipotenüsü, ve sırasıyla a ile A açısının, b ile B açısının karşısındaki kenarları gösterelim.



$$\sin A = a/c = \frac{karşı}{hip} \quad \cos A = b/c = \frac{komşu}{hip} \quad \tan A = a/b = \frac{karşı}{komsu}$$

Bir A açısı için (bir dik üçgenin bir dar açısı olmalı), bu açının sinüsü sin A ile gösterilir ve şöyle tanımlanır

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{A açısının karşısındaki kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{\text{karşı}}{\text{hip}}$$

Benzer biçimde, A açısının kosinüsü cos A şöyle tanımlanır

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{A açısının komşu kenarın uzunluğu}}{\text{hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{\text{karşı}}{\text{hip}}$$

(Şuna dikkat edelim, bir açısı A olan *herhangi* bir dik üçgen, referans aldığımız bu üçgen gibidir ve kenar uzunluklarının oranı aynıdır, dolayısıyla A açısının sinüs ve kosinüsü üçgenin büyüklüğünden bağımsızdır.)

Trigonometride sinüs ve kosinüsten sonra en yaygın kullanılan fonksiyon **tanjant** fonksiyonudur. A açısının *tanjantını*

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

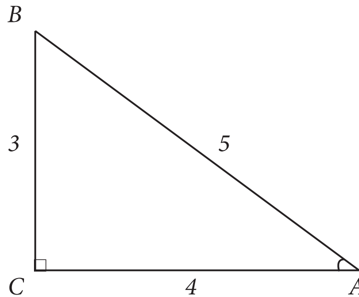
olarak tanımlıyoruz. Dik üçgen göz önüne alındığında

$$tanA = \frac{sinA}{cosA} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \frac{\text{A açısının karşı kenarının uzunluğu}}{\text{A açısının komşu kenarının uzunluğu}} = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}}$$

Sinüs, kosinüs ve tanjant formüllerini akılda tutmak için pek çok hatırlama yöntemi vardır. Örneğin "Sinüs kusar kosinüs yutar". Kusmak karşıya doğru bir eylemdir dolayısıyla sin karşı dik kenarla ilgili, yutmak ise yakına çekmekle ilgilidir, dolayısıyla komşu dik kenarı anımsatır. Eğer hem sinüs hem de kosinüsün paydasında hipotenüs olduğunu unutmazsak bu cümle bize sinüs ve kosinüsün hangi oranlar olduğunu hatırlatır. Bu cümleyi daha sonra sinüs ve kosinüsün başka bir özelliğini akılda tutmak için yine kullanacağız, bir taşla iki kuş!

Örneğin aşağıdaki 3-4-5 üçgeninde,

$$sinA = \frac{3}{5} \qquad cosA = \frac{4}{5} \qquad tanA = \frac{3}{4}$$



3-4-5 dik üçgeni için sin A = 3/5, cos A = 4/5, tan A = 3/4

Diğer taraftan aynı üçgende $\angle B$ (bazen B açısı yerine kısaca böyle yazacağız) için ne söylenebilir? Bu açının sinüs ve kosinüs değerlerini hesaplarsak

$$sinB = \frac{4}{5} = cosA \quad ve \quad cosB = \frac{3}{5} = sinA$$

buluruz. Böylece sin B = cos A ve cos B = sin A olur. Bu bir tesadüf değil. Herhangi bir $\angle A$ için, diğer dar açının karşı ve komşu kenarları birbiri ile değiştirilse de hipotenüs değişmez. $\angle A + \angle B = 90°$ olduğundan herhangi bir dar açı için

$$\sin(90° - \mathrm{A}) = \cos A \qquad \cos(90° - \mathrm{A}) = \sin A$$

sağlanır. Böylece, örneğin bir ABC dik üçgeninde $\angle A = 40°$ ise tümleyeni $\angle B =$ 50°'dir ve $\sin 50° = \cos 40°$ ve $\cos 50° = \sin 40°$ olur. Diğer bir deyişle sinüsün tümleyeni kosinüstür (aslında "co" sözcüğünün İngilizce anlamının tamamlayıcı olduğu göz önüne alındığında kosinüsün kelimesinin nereden geldiği anlaşılır.)

Trigonometri dağarcığınıza eklemeniz gereken üç tane daha fonksiyon var ancak bunlar şimdiye kadar bahsettiğimiz üç fonksiyon kadar sık kullanılmazlar. Bunlar **sekant, kosekant** ve **kotanjant** fonksiyonları olup şöyle tanımlanırlar

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Bunlarda da "co" fonksiyonlarının, kosinüs ve sinüsteki gibi tümleyen bir ilişkiye sahip olduklarını göstermek kolaydır. Yani, bir dik üçgendeki herhangi bir dar açı için $\sec(90° - \mathrm{A}) = \csc A$ ve $\tan(90° - \mathrm{A}) = \cot A$.

Bir açının sinüsünü nasıl hesaplayacağınızı bilirseniz tümleyenliği kullanarak aynı açının kosinüsünü de hesaplayabilirsiniz ve buradan hareketle tanjantı ve diğer trigonometrik fonksiyonları hesaplayabilirsiniz. Ancak bir sinüs değerini nasıl hesaplarsınız, misal sin40°? En kolay yol bir hesap makinesi kullanmaktır. Benim hesap makinem (*derece* modunda) sin40 = 0.642… olduğunu söylüyor. Hesap makinesi bu hesabı nasıl yapıyor? Bu soruyu yakında, bu kesimin sonunda açıklayacağız.

Hesap makinesine ihtiyaç duyulmadan akılda tutulması gereken bir avuç trigonometrik değer vardır. Hatırlarsanız daha önce bir 30-60-90

üçgeninin kenarlarında 1: $\sqrt{3}$: 2 oranı olduğunu gösterilmişti. Buradan hareketle

$$\sin 30° = 1/2 \qquad \sin 60° = \sqrt{3/2}$$

ve

$$\cos 30° = \sqrt{3/2} \quad \sin 60° = 1/2$$

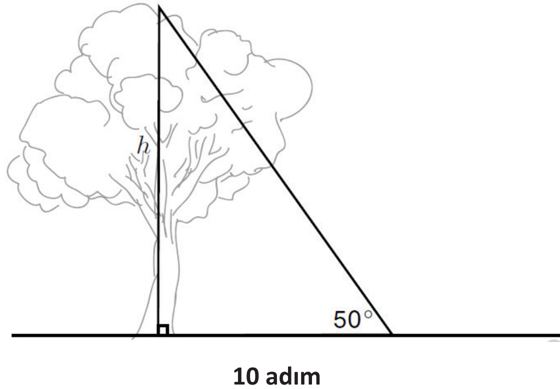
olur. Yine bir 45-45-90 üçgeninin kenarlarında 1: 1: $\sqrt{2}$ oranı olduğundan

$$\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2/2}$$

olur. Ayrıca $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ olduğu için tanjant değerlerini akılda tutmak gerektiğini düşünmüyorum, belki tan45° = 1 olduğu tan90° değerinin *tanımsızlığı* (cos90° = 0 olduğundan) akılda tutulabilir.

Trigonometri kullanarak bir dağın yüksekliğini hesaplamadan önce, daha basit bir problem olarak bir ağacın yüksekliğini belirleyelim (daha basit problemler için kullanılan trigonometriye *tırıvırıgonometri* mi demek lazım?).

Varsayalım ki aşağıdaki şekilde gösterildiği biçimde, bir ağaca on adım mesafede duruyorsunuz ve yerden ağacın tepesine olan açı da 50°. (Bu arada artık akıllı telefonların hemen hepsinde açıları ölçen uygulamalar mevcut. Ama bir iletki, bir çubuk, bir ataç gibi daha ilkel araçlarla da adına klinometre (yani *eğimölçer*) denilen kullanışlı bir alet yapılabilir.)



10 adım

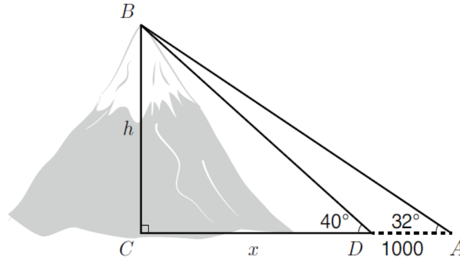
Ağacın yüksekliği nedir?

Öncelikle ağacın yüksekliğini *h* ile gösterelim. Buradan

$$\tan 50° = \frac{h}{10}$$

olduğundan $h = 10\tan 50°$, bu ise hesap makinesi ile hesaplanırsa $10.(1.19\ldots) \approx 11.9$ çıkar. Yani ağacın yüksekliği yaklaşık olarak 11.9 adımdır.

Şimdi dağ sorusuna cevap verebilmek için ilk matematiksel yöntemimizin hazırlığını yapalım. İşin zor kısmı dağın merkezine olan uzaklığımızı bilmememizdir. Esas olarak iki tane bilinmeyenimiz var (dağın yüksekliği ve bize olan uzaklığı), dolayısıyla iki parça bilgi toplayacağız. Varsayalım ki bulunduğumuz konumdan dağın tepesine olan açıyı ölçtük ve 40° bulduk, sonra dağdan 1000 adım uzaklaşıp, aşağıda gösterildiği gibi, bu açıyı da ölçüp 32° bulduk. Şimdi bu bilgileri kullanarak dağın yüksekliğini yaklaşık olarak hesaplayalım.



Metot 4 (eğim metodu): h ile dağın yüksekliğini ve x ile bulunduğumuz ilk konumun dağa olan uzaklığımızı gösterelim (yani $\overline{CD}$ uzunluğuna x diyoruz). BCD dik üçgenine bakalım, $\tan 40° \approx 0.839$ olduğundan

$$\tan 40° \approx 0.839 = \frac{h}{x}$$

yani $h = 0.839x$ çıkar. ABC üçgeninden,

$$\tan 32° \approx 0.625 = \frac{h}{x + 1000}$$

yani $h = 0.625(x + 1000) = 0.625x + 625$ olur.

Her iki ifadede h değerlerini eşitlersek,

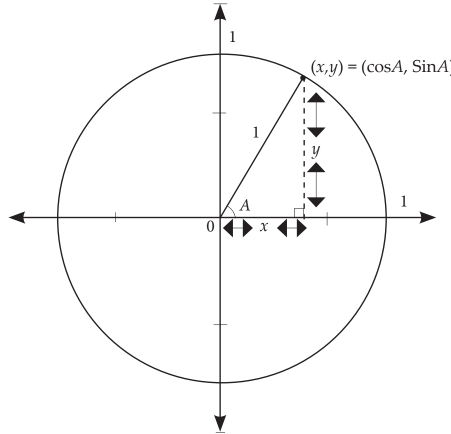
$$0.839x = 0.625x + 625$$

yani çözüm olarak $x = 625 / (0.214) \approx 2920$ bulunur. Böylece, h yaklaşık olarak $0.839(2920) = 2450$ bulunur, yani dağın yüksekliği aşağı yukarı 2450 adımdır.

Trigonometri ve Çemberler

Şimdiye kadar bir dik üçgen yardımıyla trigonometrik fonksiyonları tanımladık, bu tanımın işimizi göreceği konusunda bana tamamen güvenebilirsiniz. Ancak bu tanımın bir eksiği var, o da açı sadece 0° ile 90° arasında olduğu zaman sinüs, kosinüs ve tanjantını hesaplayabiliyoruz (bir dik üçgende daima bir tane 90°'lik açı bulunacağından diğer ikisi zaten dar açı olmak zorundadır). Bu bölümde trigonometrik fonksiyonları *birim çember* diliyle tanımlayacağız. Bu sayede *hangi* açı olursa olsun sinüs, kosinüs ve tanjantını hesaplayabileceğiz.

Hatırlarsak birim çember, yarıçapı 1 ve merkezi (0, 0)'da olan bir çemberdir. Bir önceki bölümde, Pisagor teoremini kullanarak, $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağladığını görmüştük. Varsayalım ki sizden birim çember üzerindeki bir (x, y) noktasını tanımlamanızı istedim, bu nokta aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, (1, 0) noktasından saat yönünün tersine hareket edilerek bir A dar açısına karşılık gelsin,



Birim çember üzerindeki (x, y) noktası $x = cosA$ ve $y = sinA$ olan bir A açısına karşılık gelir

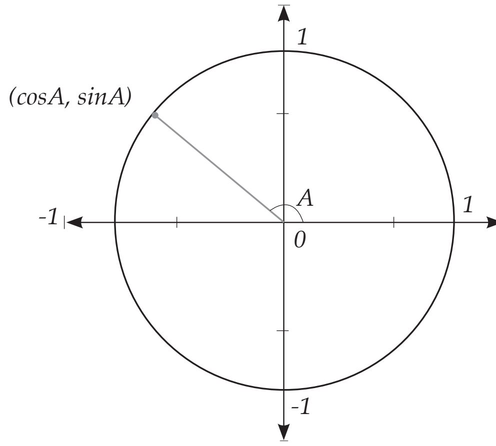
Bir dik üçgen çizip kosinüs ve sinüs formüllerimizi uygulayarak x ve y değerlerini bulabiliriz, şöyle ki,

$$cosA = \frac{komşu}{hipotenüs} = \frac{x}{1} = x$$

ve

$$\sin A = \frac{karşı}{hipotenüs} = \frac{y}{1} = y$$

olur. Diğer bir ifade ile (x,y) noktası $(\cos A, \sin A)$ noktasına eşittir. (Daha da genel olarak, yarıçapı r olan bir çember için $(x,y) = (r \cos A, r \sin A)$ olur.) Herhangi bir A açısı için, birim çember üzerindeki A açısına karşılık gelen noktayı $(\cos A, \sin A)$ olarak tanımlayıp bu düşünceyi genelleştirebiliriz. (Diğer bir ifade ile birim çember üzerinde açısı A olan bir nokta için, $\cos A$ değeri x-koordinatına (apsis) ve $\sin A$ değeri y-koordinatına (ordinat) karşılık gelir.) İşte büyük resim.



cos*A ve sinA* 'nın genel tanımı

İşte bir başka büyük resim, burada birim çemberi 30°'lik açılara bölüyoruz (45°'yi daha sağlıklı ölçüm için yerleştirdik), çünkü burada karşımıza çıkan açıları daha önce incelediğimiz özel üçgenlerden biliyoruz. 0°, 30°, 45°, 60° ve 90° nin kosinüs ve sinüs değerlerini listeleyelim. Yani

$$(\cos 0°, \sin 0°) = (1, 0)$$

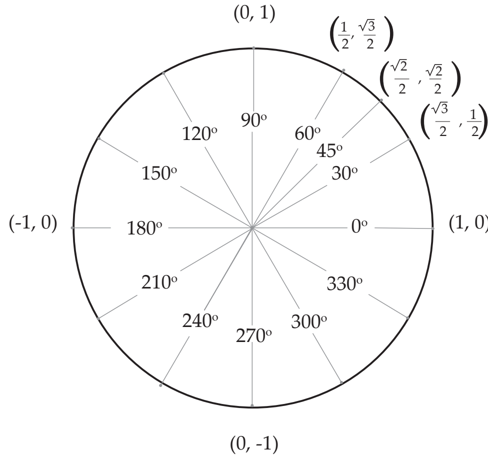
$$(\cos 30°, \sin 30°) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$$

$$(\cos 45°, \sin 45°) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

$$(\cos 60°, \sin 60°) = (1/2, \sqrt{3}/2)$$

$$(\cos 90°, \sin 90°) = (0, 1)$$

Birazdan bu açıların katlarının ilk çeyrek dairedeki değerlerin yansıtılmaları ile hesaplanabileceğini göreceğiz.



Bir açıya 360° eklemek veya çıkarmak esasında açıyı değiştirmez (tam olarak çemberin etrafında bir tam tur atmış oluruz), gerçekten örneğin herhangi bir A açısı için,

$$\sin(A \pm 360^\circ) = \sin A \qquad \cos(A \pm 360^\circ) = \cos A$$

Bir açının negatif olması saat yönünde bir harekettir. Örneğin - 30° ile 330° aynı açıdır. Şunu unutmayın *A* derece saat yönünde hareket etmek ile A derece saat yönünün tersine hareket etmek aynı *x*-koordinatını verir, ancak *y*-koordinatları birbirinin ters işaretlisi olur. Başka bir ifade ile herhangi bir *A* açısı için,

$$\cos(-A) = \cos A \qquad \sin(-A) = -\sin A$$

Daha önce sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının hangi oranlar olduğunu "sinüs kusar kosinüs yutar" cümlesi ile hatırlayabileceğimizden bahsetmiştik. Ayrıca bu ifadenin başka bir yerde daha işimize yarayacağını söylemiştik. İşte tam o yerdeyiz. Yukarıdaki iki eşitliğe bakılırsa kosinüs fonksiyonunun eksi işaretini yuttuğunu, sinüs fonksiyonunun ise dışarı çıkardığını görebilirsiniz.

Örneğin,

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$$

A açısını *y*-eksenine göre yansıtırsak (simetriğini alırsak) tümleyen olan 180 - A elde edilir. Bu durumda birim çemberde *y* değeri değişmez ancak *x* değerinin ters işaretlisi gelir. Başka bir deyişle,

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A \qquad \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

Örneğin A = 30° ise,

$$\cos 150° = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2 \qquad \sin 150° = \sin 30° = 1/2$$

Daha önceki $\tan A = \sin A / \cos A$ örneğinde olduğu gibi diğer trigonometrik fonksiyonları tanımlamaya devam edelim.

x-ekseni ve y-ekseni düzlemi dört *çeyrek bölgeye* ayırır. Bu bölgeleri I, II, III ve IV olarak adlandıracağız, şöyle ki açıların 0° ile 90° arasında olduğu çeyrek I, 90° ile 180° arasında olduğu çeyrek II, 180° ile 270° arasında olduğu çeyrek III ve 270° ile 360° arasında olduğu çeyrek IV olarak adlandırılır. Dikkat edersek sinüs I. ve II. çeyrekte pozitif, kosinüs I. ve IV. çeyrekte pozitif, dolayısıyla tanjant I. ve III. çeyreklerde pozitiftir. Bunu akılda tutmak için bazı öğrenciler şu kodlamayı kullanırlar "Bütün Sınıf Tahtada Coşar (B, S, T, C)" böylece sırasıyla hangi çeyrek bölgede hangi trigonometrik fonksiyonun pozitif olduğu akılda tutulmuş olur (bütün hepsi, sinüs, tanjant, kosinüs).

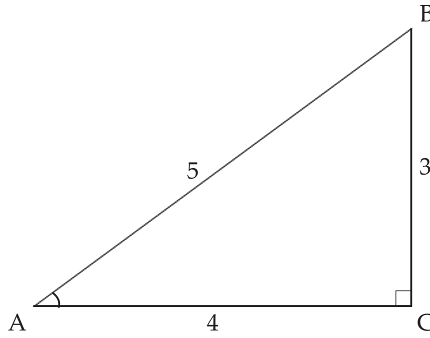
Dağarcığımıza eklememiz gereken son bilgiler *ters trigonometrik fonksiyonlar* olup bunlar bilmediğimiz açıları tanımlamamız konusunda işe yararlar. Örneğin, 1/2'nin ters sinüsü $\sin^{-1}(1/2)$ ile gösterilir ve bize $\sin A = 1/2$ olan A açısını söyler. Önceden $\sin 30° = 1/2$ olduğunu bildiğimiz için,

$$\sin^{-1}(1/2) = 30°$$

değerini buluruz. $\sin^{-1}$ fonksiyonu (diğer bir ifadeyle *arc sinüs* fonksiyonu) her zaman -90° ile 90° arasında bir açı verir, ama şunu unutmamak lazım bu aralığın dışında aynı sinüs değerini veren başka açılar da vardır. Mesela sin150° = 1/2'dir, ayrıca 30° ile 150°'ye 360°'nin katlarının eklenmesiyle elde edilen açıların sinüsleri de 1/2 olur.

Aşağıdaki verilen 3-4-5 üçgeni için, hesap makinemiz ters trigonometrik fonksiyonlardan yararlanarak A açısını üç farklı yoldan hesaplayabilir:

$$\angle A = \sin^{-1}(3/5) = \cos^{-1}(4/5) = \tan^{-1}(3/4) \approx 36.87° \approx 37°$$



Ters trigonometrik fonksiyonlar kenar uzunluklarından açıları belirleyebilirler.

Burada tan A = 3/4, ∠ A = $\tan^{-1}(3/4) \approx 37^\circ$ olur.

Bu trigonometrik fonksiyonları işlerimizde kullanmanın zamanı geldi. Geometride, Pisagor teoremi, herhangi bir dik üçgende dik ayakların uzunlukları verildiğinde hipotenüsün uzunluğunun nasıl hesaplanacağını söyler. Trigonometride benzer hesaplamayı *kosinüs kuralı* yardımıyla *herhangi* bir üçgene uygulayabiliriz.

Teorem (Kosinüs Kuralı): C açısında birleşen kenarlarının uzunlukları *a* ve *b* olan herhangi bir üçgenin C açısının karşısındaki, uzunluğu c olan üçüncü kenarı için

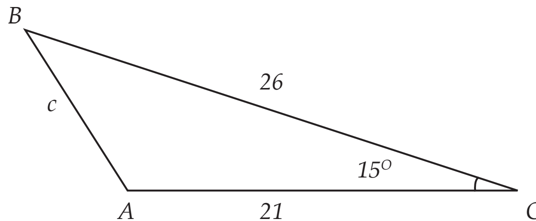
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

sağlanır.

Örneğin, aşağıdaki ABC üçgeninde uzunlukları 21 ve 26 olan kenarların arasındaki açı 15°'dir. Dolayısıyla kosinüs kuralına göre uzunluğu *c* olan üçüncü kenar için,

$$c^2 = 21^2 + 26^2 - 2(21)(26)\cos 15^\circ$$

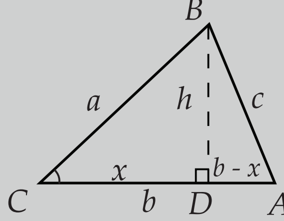
sağlanmalıdır. $\cos 15^\circ \approx 0.9659$ olduğundan, bu eşitlikten $c^2 = 62.21$ elde edilir, böylece $c \approx 7.89$ bulunur.



KOYU MATEMATİK

Kanıt: Kosinüs kuralının kanıtını, ∠C açısının dik açı, dar ve geniş açı olduğu üç farklı durumu ayrı ayrı ele alarak yapacağız.

Eğer ∠C bir dik açı ise cosC = cos90° = 0 olduğundan kosinüs kuralı $c^2 = a^2 + b^2$ eşitliğine döner ki bunun doğru olduğunu Pisagor teoreminden biliyoruz.



Eğer ∠C yukarıdaki şekildeki gibi bir dar açı ise, B köşesinden $\overline{AC}$ kenarına bir dik çizelim ve kesişim noktası D olsun. Böylece ABC üçgeni iki tane dik üçgene ayrılmış olur. Yukarıdaki şekil göz önüne alınarak CBD üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa, $a^2 = h^2 + x^2$ olur, yani

$$h^2 = a^2 - x^2$$

bulunur. Diğer taraftan ABD üçgeninde, $c^2 = h^2 + (b - x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$ olur, yani

$$h^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

Bu iki eşitlikte h^2 değerleri eşitlenirse

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

ve böylece

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

çıkar. Şimdi CBD üçgenine bakarsak $\cos C = x/a$ yani $x = a \cos C$ olduğu görülür. Bunu yerine yazarsak, C bir dar açı olduğunda

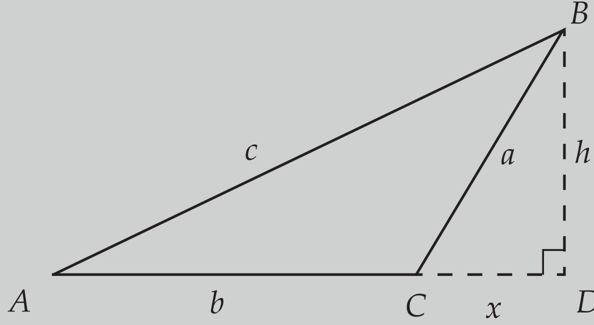
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

kuralı elde edilir.



KOYU MATEMATİK

Eğer ∠ C geniş ise, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ABC üçgeninin dışında bir CBD dik üçgeni oluşturabiliriz.



CBD ve ABD üçgenlerinde Pisagor teoreminden $a^2 = h^2 + x^2$ ve $c^2 = h^2 + (b+x)^2$ dir. Yine h² değerlerini eşitlersek,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$$

olur. Bu defa CBD üçgeni yardımıyla $\cos(180^\circ - C) = x/a$ yani

$$x = a\cos(180^\circ - C) = -a\cos C$$

bulunur. Dolayısıyla yine istediğimiz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

eşitliği elde edilir. 

Bu arada, biraz önceki üçgenin alanı ile ilgili de güzel bir formül var.

Sonuç: Bir ABC üçgeninin iki kenarının uzunluğu *a* ve *b*, bunların arasında kalan açı da ∠ C ise

$$\text{ABC üçgeninin alanı} = \frac{1}{2}ab\ sin\ C$$

dir.

KOYU MATEMATİK

Kanıt: Taban uzunluğu b ve yüksekliği h olan bir üçgenin alanı $\frac{1}{2}bh$ olur. Kosinüs kuralını kanıtladığımız üç durumda da üçgenin taban uzunluğu b'dir. Şimdi h'yi belirleyelim. Dar açılı durumda şu gözlemi yapalım, $\sin C = h/a$ yani $h = a \sin C$'dir. Geniş açılı durumda, $\sin(180^\circ - C) = h/a$ yani

$$h = a\sin(180^\circ - C) = a\sin C$$

yani bir önceki durumla aynı sonuç elde edilir. Dik üçgen durumunda, $h=a$ dır ancak $C= 90°$ olduğundan $\sin 90° = 1$'dir dolayısıyla bu durumu da $h = a\sin C$ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla her üç durumda da $h = a\sin C$ yani üçgenin alanı arzu edildiği biçimde $\frac{1}{2}ab \sin C$ olarak elde edilir. □

Bu sonuçtan şöyle bir çıkarım yapabiliriz,

$$\sin C = \frac{2(ABC \text{ üçgenin alanı})}{ab}$$

ve buradan da

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{2(ABC \text{ üçgenin alanı})}{abc}$$

Başka bir ifade ile, ABC üçgeni için, sinC/c değeri ABC üçgeninin alanının, bütün kenar uzunluklarının çarpımı olan abc sayısına bölümünün iki katıdır. Fakat dikkat edilirse ifadenin C açısına özgü bir durumu yoktur. Aynı sonuç $\sin B/b$ veya $\sin A/a$ için de geçerlidir. Bu çıkarımımız bize aşağıdaki kullanışlı teoremin kanıtını verir.

Teorem (Sinüs Kuralı): Kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c olan bir ABC üçgeninde

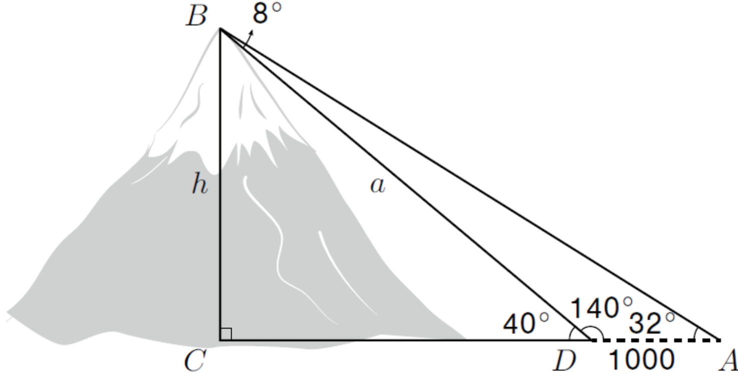
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

veya buna denk olarak

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Sinüs kuralını dağın yüksekliğini farklı bir yoldan hesaplamak için kullanabiliriz. Aşağıdaki şekilde gösterildiği üzere *a* dağın tepesinden uzaklığımız olsun, şimdi buna odaklanalım.



Dağın yüksekliğini sinüs kuralı yardımıyla hesaplama

Beşinci Metot (Sinüs Kuralı): ABD üçgeninde

$$\angle BAD = 32°,\ \angle BDA = 180° - 40° = 140°$$

ve böylece $\angle ABD = 8^{\circ}$. Bu üçgene sinüs kuralını uygularsak,

$$\frac{a}{sin32°} = \frac{1000}{sin8°}$$

Her iki tarafı sin32° ile çarparsak, $a = 1000 \sin 32° / \sin 8^{\circ} \approx 3808$ metre olur. Ayrıca sin40° $\approx 0.6428 = h/a$ olduğundan

$$h = a \sin 40° \approx (3808)\,(0.6428) = 2448$$

dolayısıyla dağ yaklaşık olarak 2450 metre yüksekliktedir, ki bu daha önce bulduğumuz sonuç ile uyuşmaktadır.

KOYU MATEMATİK

İşte öğrenmeye değer bir başka formül! *Heron'un teoremi* adı verilen bu formül kenar uzunlukları a, b ve c olan bir üçgenin alanını verir. Formül temel olarak *yarıçevre*nin, yani

$$u = \frac{a+b+c}{2}$$

değerinin hesaplanmasına dayanır. Heron'un formülü, kenar uzunlukları a,b ve c olan üçgenin alanının

$$\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğunu söyler. Örneğin, kenar uzunlukları 3, 14, 15 (π' nin ilk beş basamağı) olan bir üçgen için $u = (3 + 14 + 15)/2 = 16$ olur. Buradan da üçgenin alanı

$$\sqrt{16(16-3)(16-14)(16-15)} = \sqrt{416} \approx 20.4$$

bulunur.

Heron'un formülü kosinüs kuralı ve gözü pek bir cebirle elde edilebilir.

Trigonometrik Özdeşlikler

Trigonometrik fonksiyonlar adına *özdeşlik* dediğimiz birçok ilginç ilişkiyi sağlarlar. Bunlardan birkaçını şimdiye kadar gördük bile, örneğin

$$\sin(-A) = -\sin A \qquad \cos(-A) = \cos A$$

Bu bölümde daha pek çok ilginç özdeşlik göreceğiz ki bunların bir kısmı oldukça kullanışlı formüller verirler. İlk özdeşliğimiz birim çember formülünden gelen

$$x^2 + y^2 = 1$$

dir. $(\cos A, \sin A)$ noktası birim çemberin üzerinde olduğundan yukarıdaki ilişkiyi sağlamalıdır, dolayısıyla $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$ olur. Bu elde ettiğimiz, belki de bütün trigonometrinin en önemli özdeşliğidir.

Teorem: Herhangi bir A açısı için,

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

Şimdiye kadar herhangi bir açıdan bahsederken çoğunlukla A harfini kullandık, ancak hangi harfi kullandığımızın hiçbir önemi yoktur. Yukarıdaki eşitlikte çoğunlukla başka harfler kullanılarak ifade edilir. Örneğin

$$cos^2 x + sin^2 x = 1$$

Bir başka popüler tercih Yunan alfabesindeki θ (teta) harfidir

$$cos^2 \theta + sin^2 \theta = 1$$

Bazen de bu özdeşliği herhangi bir değişken kullanmaksızın verebiliriz. Örneğin yukarıdaki teorem kısaca şöyle ifade edilebilir.

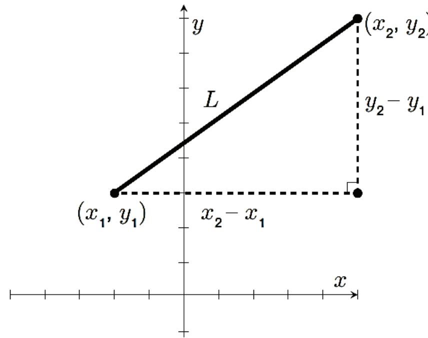
$$cos^2 + sin^2 = 1$$

Başka özdeşliklerin kanıtlarına geçmeden önce şimdi bir doğru parçasının uzunluğunu hesaplamak için Pisagor teoremini kullanalım. Bu hem ilk özdeşliğimizin kanıtında anahtar rol oynayacak hem de kendi başına da ilginç bir sonuç olacaktır.

Teorem (uzaklık formülü): (x_1, y_1) ile (x_2, y_2) noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğunu L ile gösterelim. Bu durumda

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Örneğin, (-2, 3) ve (5, 8) noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu $\sqrt{(5-(-2))^2 + (8-3)^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ olur.



Pisagor teoreminden $L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Kanıt: Yukarıdaki şekildeki gibi(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını göz önüne alalım. Bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının hipotenüs olduğu bir dik üçgen çizelim. Bizim çizimimize göre taban uzunluğu $x_2 - x_1$ ve yük-

sekliği $y_2 - y_1$ olur. Böylece Pisagor teoreminden hipotenüs olan L için

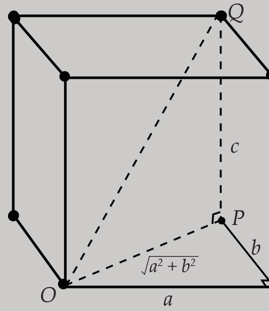
$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

sağlanır, buradan da arzu ettiğimiz $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ elde edilir. □

Dikkat edersek formül $x_2 < x_1$ veya $y_2 < y_1$ durumunda da geçerlidir. Örneğin, $x_1 = 5$ ve $x_2 = 1$ için $x_2 - x_1 = -4$ olsa da x_1 ile x_2 arasındaki uzaklık 4 olur, önemli olan farkın karesinin 16 olmasıdır.

KOYU MATEMATİK

Boyutları $a \times b \times c$ olan bir kutunun köşegeninin uzunluğu nedir? *O* ve *P* kutunun taban köşegenine göre farklı uçlarda olsunlar. Taban bir a x b dikdörtgeni olduğundan $\overline{OP}$ **köşegeninin uzunluğu** $\sqrt{a^2 + b^2}$ olur.



Şimdi *P* noktasından yukarıya doğru c birim çıkarsak, *O* noktasının cisim köşegene göre karşısındaki *Q* noktasına ulaşırız. *O* ile *Q* arasındaki uzaklığı bulmak için öncelikle *OPQ* **üçgenin, dik kenar uzunlukları** $\sqrt{a^2 + b^2}$ ve c olan bir dik üçgen olduğuna dikkat edelim. Böylece Pisagor teoreminden $\overline{OQ}$ cisim köşegeninin uzunluğu

$$\sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

olarak bulunur.

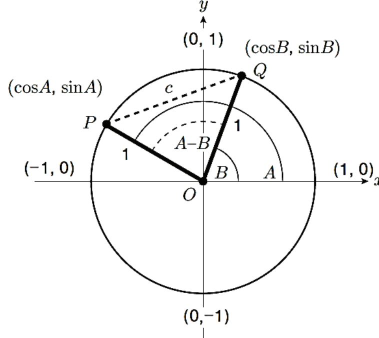
Artık hem zarif hem de kullanışlı bir trigonometrik özdeşliği kanıtlamaya hazırız. Teoremin kanıtı birazcık incelik gerektiriyor, bu yüzden isterseniz geçebilirsiniz, ama işin iyi tarafı da bir kez bu zorluğu aşıp özdeşliği elde edersek peşinden bir sürü özdeşlik hemen elde edilebilecek.

Teorem: Herhangi A ve B açıları için,

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

sağlanır.

Kanıt: Aşağıdaki resimde gösterilen O merkezli birim çemberi göz önüne alalım, P noktası $(\cos A, \sin A)$ ve Q noktası da $(\cos B, \sin B)$ noktasını göstersin. $\overline{PQ}$ doğru parçasının uzunluğunu c ile gösterirsek, c için ne söyleyebiliriz?



$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin$ eşitliğinin kanıtı için kullanılabilecek şekil

OPQ üçgeninden göreceğimiz üzere $\overline{OP}$ ve $\overline{OQ}$ kenarlarının her ikisi de birim çemberin yarıçapı olup uzunlukları 1 ve bu kenarların aralarındaki $\angle POQ$ açısının ölçüsü A - B dir. Böylece, kosinüs kuralından,

$$c^2=1^2+1^2-2\,(1)\,(1)\cos(A-B)=2-2\cos(A-B)$$

bulunur. Diğer taraftan, P ve Q arasındaki uzaklık olan c için uzunluk formülü olan

$$c^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

göz önüne alınıp P = $(\cos A, \sin A)$ ve Q = $(\cos B, \sin B)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos B-\cos A)^2+(\sin B-\sin A)^2 \\ &= \cos^2 B-2\cos A\cos B+\cos^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B+\sin^2 A \\ &= 2-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B \end{aligned}$$

elde edilir, son adımda $\cos^2 B+\sin^2 B=1$ ve $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ özdeşliklerini kullanıldı.

c^2 için elde ettiğimiz bu iki ifade eşitlenirse

$$2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$$

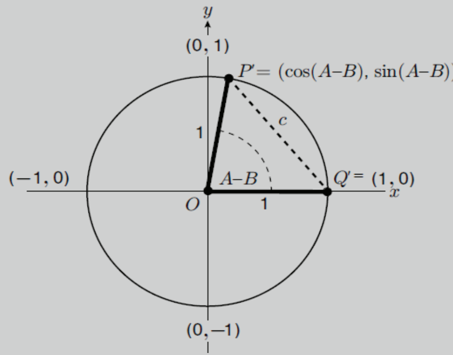
bulunur. Her iki taraftan 2'leri çıkartıp, -2 ile bölersek

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

eşitliği elde edilmiş olur. □

KOYU MATEMATİK

$\cos(A-B)$ formülünün kanıtı kosinüs kuralına dayanmakta olup $0^\circ < A-B < 180^\circ$ varsayımı altında yapılmıştır. Ancak bu varsayımı yapmadan da teoremi kanıtlayabiliriz. Eğer biraz önceki *POQ* üçgenini saat yönünde *B* derece döndürürsek Q' noktası *x*-ekseni üzerindeki *(1, 0)* noktası olmak üzere bu üçgene denk olan *P'OQ'* üçgenini elde ederiz.



$\angle P'Q' = A - B$ olduğundan P' = (cos(A - B), (sin(A - B)) olur. Dolayısıyla uzaklık formülünü $\overline{P'Q'}$ için uygularsak

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos(A-B) - 1)^2 + (\sin(A-B) - 0)^2 \\ &= \cos^2(A-B) - 2\cos(A-B) + 1 + \sin^2(A-B) \\ &= 2 - 2\cos(A-B) \end{aligned}$$

bulunur, yani $c^2 = 2 - 2\cos(A-B)$ sonucunu kosinüs kuralını kullanmadan hatta A - B açısıyla ilgili herhangi bir varsayım yapmadan elde edebiliriz. Kanıtın kalan kısmı yukarıdakinin aynısıdır.

Dikkat edersek $A = 90°$ için $\cos(A - B)$ formülünde

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - B) &= \cos 90^\circ \cos B + \sin 90^\circ \sin B \\ &= \sin B \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü cos90° = 0 ve sin90° = 1'dir. Eğer yukarıdaki eşitlikte *B* yerine 90° - B yazarsak

$$\begin{aligned}\cos(B) &= \cos 90^\circ \cos(90^\circ - B) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - B)\\ &= \sin(90^\circ - B)\end{aligned}$$

bulunur. Daha önce bu iki ifadenin *B* açısı bir dar açı olduğunda doğru olduğunu görmüştük, ancak yukarıdaki cebirsel işlemlerden herhangi bir *B* açısı için doğru olduğu görüldü. Benzer şekilde, $\cos(A-B)$ için verdiğimiz teoremde *B* yerine – *B* yazarsak

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A\cos(-B) + \sin A\sin(-B)\\ &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\end{aligned}$$

ede edilir, çünkü $\cos(-B) = \cos B$ ve sin(- *B*) = - sin*B* olduğunu biliyoruz. Bu formülde $B = A$ alırsak, *yarım* açı formülü olarak adlandırılan

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca burada $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ ve $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A \text{ ve } \cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

görülür.

Kosinüs için elde ettiğimiz eşitlikleri kullanarak sinüs için benzer eşitlikler elde edebiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \cos(90-(A+B)) = \cos((90-A)-B)\\ &= \cos(90-A)\cos B + \sin(90-A)\sin B\\ &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\end{aligned}$$

$B = A$ alarak sinüs için çift açı formülü olarak adlandırılan

$$\sin(2A) = 2\sin A\cos A$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan *B* yerine –*B* yazarak aşağıdaki formül elde edilir,

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

Bu bölümde şimdiye kadar öğrendiğimiz özdeşliklerin önemli bir kısmını özetleyelim.

Pisagor teoremi:	$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$
Negatif açılar:	$\cos(-A) = \cos(360^\circ - A) = \cos A$ $\sin(-A) = \sin(360^\circ - A) = -\sin A$
Bütünler açılar:	$\cos(180^\circ - A) = -\cos(A)$ $\sin(180^\circ - A) = \sin(A)$
Tümler açılar:	$\cos(90^\circ - \mathrm{A}) = \sin\mathrm{A}$ $\sin(90^\circ - \mathrm{A}) = \cos\mathrm{A}$
Farkın kosinüsü:	$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
Toplamın kosinüsü:	$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
Toplamın sinüsü:	$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
Farkın sinüsü:	$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
Yarım açı formülleri:	$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$ $\sin(2A) = 2\sin A \cos A$
ABC üçgeninin alanı:	$Alan = \frac{1}{2} ab \sin C$
Kosinüs kuralı:	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
Sinüs kuralı:	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Kullanışlı bazı trigonometrik özdeşlikler

Tekrar vurgulamak gerekirse, her ne kadar bu özdeşlikleri yazarken A veya B açılarını kullanmış olsak da bu harflere özgü herhangi bir durum söz konusu değil. Bu özdeşliklerin başka açılar kullanılarak yazılmış biçimlerine de rastlayabilirsiniz. Örneğin,

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \text{ veya } \sin(2\Theta) = 2\sin\Theta\sin\Theta.$$

Radyanlar ve Trigonometrik Grafikler

Şimdiye kadarki geometri ve trigonometri tartışmamızda açılarımızı 0 ile 360 arasında bir *derece* ölçüsüyle verdik. Ancak birim çemberi düşünürseniz, aslında özellikle 360 sayısının kullanılmasının gerektiren doğal bir neden yok. Bu sayı eski Babilliler tarafından, muhtemelen 60 tabanlı sayı sistemini kullanmaları ve 360 sayısının bir yıldaki gün sayısına yakın olması sebebiyle seçilmiştir. Bunun yerine, bilimin pek çok alanında ve matematikte açıları ölçmek için *radyan* ölçüsü tercih edilir. Tanımlarsak

$$2\pi \text{ radyan} = 360^\circ$$

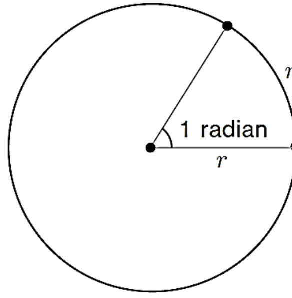
veya buna denk olarak,

$$1 \text{ radyan} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

olur. Veya $\tau = 2\pi$ olarak göstermeyi seven tau (τ) severler için

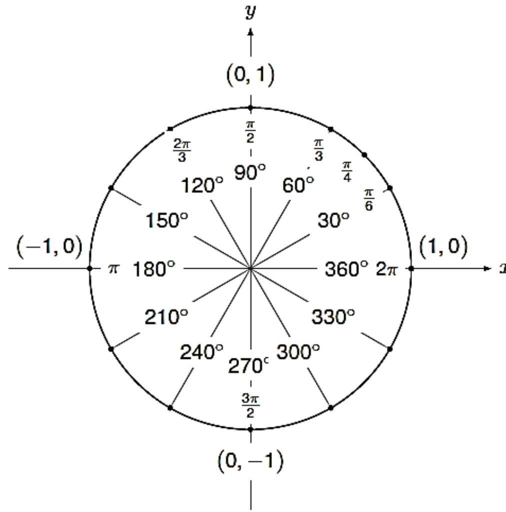
$$1 \text{ radyan} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{\tau}$$

yazılabilir. Sayısal değer olarak 1 radyan yaklaşık 57°'dir. Neden radyan dereceden daha doğaldır? Yarıçapı r olan bir çember üzerinde 2π radyanlık bir açı çemberin çevresi olan 2π r uzunluğundaki yayı görür. Eğer bu açının herhangi bir oranını alırsak, bu durumda bu açının gördüğü yayın uzunluğu 2π r defa bu oran olur. Özel olarak, 1 radyanlık açı uzunluğu $2\pi r(1/2\pi) = r$ olan yayı görür, *m* radyanlık açı ise *mr* uzunluğundaki yayı görür. Özetlersek, birim çember üzerinde, radyan ölçüsüyle verilmiş bir açı gördüğü yayın uzunluğuna eşittir. Ne uyum ama!

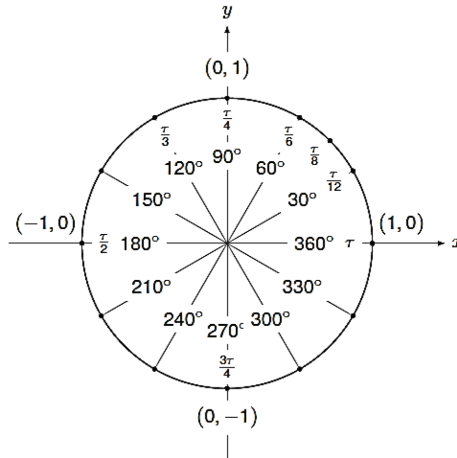


Bir çemberde 2π radyan vardır.

İşte sık karşılaşılan bazı açıların radyan ölçüleri birim çember üzerinde:



Ve karşılaştırma yapmak için işte τ versiyonu:



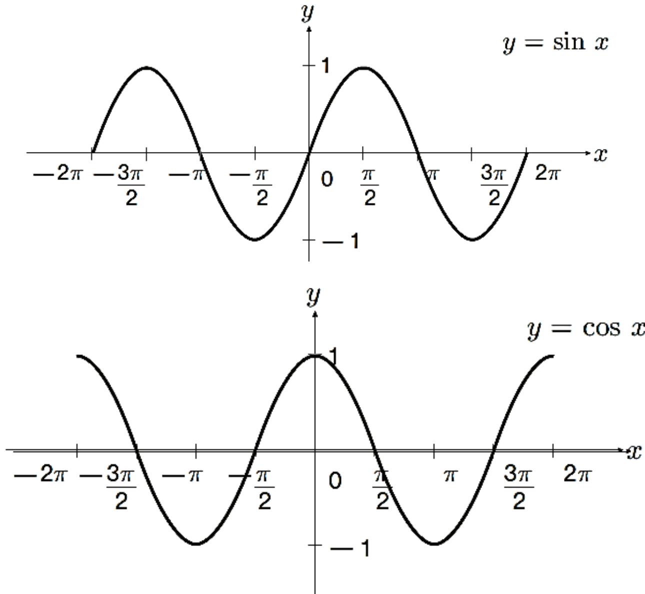
Bazı matematikçilerin neden π yerine τ tercih ettiklerini yukarıdaki resimden görebilirsiniz. Örneğin çemberin dörtte birine karşılık gelen 90° için radyan ölçüsü $\tau/4$ radyandır. Çemberin üçte birine karşılık gelen 120° için radyan ölçüsü $\tau/3$ olur. Aslında τ sembolü de *turn (dönüş)* kelimesinin baş harfinden gelmektedir. Mesela çember etrafında bir tam tur derece olarak 360°, radyan ölçüsü olarak τ ölçüsündedir; yine 60° bir tam turun altıda birine karşılık gelir ki bunun radyan ölçüsü $\tau/6$ olur.

Bu kitabın ilerleyen kısımlarında göreceğimiz üzere, trigonometrik fonksiyonları hesaplamak için kullanılan formüller derece yerine radyan kullanıldığında çok daha sadedir. Örneğin, sinüs ve kosinüsü "sonsuz uzunluklu polinomlar" kullanarak aşağıdaki formüller ile ifade edebiliriz:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - \cdots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - \cdots$$

Ancak bu formüller sadece x radyan ölçüsü olarak kullanıldığında anlamlıdır. Benzer biçimde, kalkülüste $\sin x$ fonksiyonunun *türevinin* $\cos x$ olduğunu göreceğiz, ancak bu yalnızca x radyan ölçüsünde olduğunda doğrudur. Yine $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarının *grafikleri* genellikle x'in radyan ölçüsüyle verildiği durumlarda çizilir.



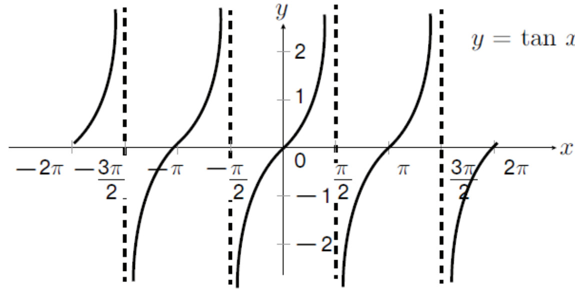
x değişkeni radyan ölçüsünde alındığında $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının grafikleri

Sinüs ve kosinüsün döngüsel yapısından dolayı her iki grafikte her 2π aralığında kendisini tekrar eder. (Tau-cuları haklı çıkaran bir neden daha!) Gayet mantıklı, çünkü $x+2\pi$ açısı x açısı ile aynıdır. Bu durumda bu grafik 2π *periyotludur* deriz. Ayrıca kosinüsün grafiğini sağa doğru $\pi/2$ birim kaydırırsak sinüsün grafiği ile tamamen örtüştüğünü görürüz. Çünkü $\pi/2$ radyan 90° olup

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos(\pi/2 - x)\\ &= \cos(x - \pi/2)\end{aligned}$$

Örneğin $\sin 0 = 0 = \cos(-\pi/2)$ ve $\sin \pi/2 = 1 = \cos 0$.

Diğer yandan $\tan x = \sin x/\cos x$ olduğundan $\cos x = 0$ için (ki bunlar π'nin katlarının orta noktalarıdır) $\tan x$ tanımlı değildir. Periyodu π olan tanjant fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



y = tan x fonksiyonunun grafiği

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının kombinasyonları ile periyodik davranan neredeyse her fonksiyon inşa edilebilir. İşte bu nedenle trigonometrik fonksiyonlar kalp atışı, sıcaklık, ekonomik veriler veya ses, su dalgaları, elektrik gibi fiziksel olgular benzeri mevsimsel (dönemsel) davranışları modellemenin bir enstrümanıdır.

Hadi bu bölümü trigonometri ve π arasındaki sihirli bir ilişkiyle sonlandıralım. Bir hesap makinesi alın ve yazabildiğiniz kadar 5 yazın. Benim hesap makinem 5555555555555555 kadarına izin veriyor. Bu sayının çarpmaya göre tersini alınca,

$$1/5555555555555555 = 1.8 \times 10^{-16}$$

sayısını elde ettim. Şimdi hesap makinesindeki sinüs düğmesine basalım (derece modunda iken) ve baştaki basamaklara bakalım (ön kısımda ortaya çıkan peş peşe sıfırlardan oluşan kısmı görmezden gelelim). Benim makinemde ortaya çıkan:

$$3.1415926535898 \times 10^{-18}$$

(ondalık kısımdan sonra on yedi tane sıfır var) yani π sayısının bir sürü basamağını elde ettik. Aslında en azından baştan ilk beş basamağı 5 rakamından oluşan 55555…şeklinde herhangi bir sayı ile başlanarak da benzer pi-li bir sonuç elde edilebilir.

Bu bölümde, üçgenleri ve çemberleri daha iyi anlamak için trigonometrinin bize nasıl yardımcı olduğunu gördük. Trigonometrik fonksiyonların aralarında birçok güzel bağıntı vardır, bu kesimde de π sayısıyla nasıl yakından ilişkili olduklarını gördük. Gelecek bölümde ise, başka iki tane temel sayı ile de iç içe olduklarını göreceğiz. Bu sayılar, irrasyonel e sayısı: $e = 2.71828...$ ve sanal i sayısıdır.

ONUNCU BÖLÜM

$e^{i\pi} + 1 = 0$

i ve *e* sayılarının sihri

En Güzel Matematik Formülü

Matematik ve bilim dergileri bir anket yapıp okuyucularından en güzel matematiksel eşitliği seçmelerini istesinler[1]. Bu durumda Leonard Euler'e ait aşağıdaki formülün listenin en başına yerleşmesi kaçınılmazdır:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Bazıları bu formülü "Tanrısal eşitlik" olarak adlandırır, çünkü matematiğin belki de en önemli beş sayısını içerir; aritmetiğin temeli olan *0* ve *1*, geometrinin en önemli sayısı π, kalkülüsün en önemli sayısı *e*, muhtemelen cebirin en önemli sayısı *i*. Hatta temel işlemler olan toplama, çıkarma ve üs almayı içerir. Hali hazırda *0, 1* ve π sayılarının anlamlarına dair iyi fikirlere sahibiz, bu bölümün amacı ise irrasyonel *e* sayısı ve sanal *i* sayısını araştırmaktır. Bölümün sonuna geldiğimizde yukarıdaki formül 1 + 1 = 2 eşitliği kadar anlaşılır gelecektir (ya da en azından $\cos 180^{\circ} = -1$ kadar).

---

[1]Aslında 1988 yılında Mathematical Intelligencer dergisinin okuyucuları arasında böyle bir anket yapılmış ve sonuç tam da beklediğimiz gibi! (Kaynak: http://planetmath.org/thetop10mostbeautifultheorems)

KOYU MATEMATİK

İşte en güzel olma yarışında yer alan başka birkaç matematiksel eşitlik. Bunların büyük çoğunluğu bu kitapta yer alıyor, bazılarını gördünüz bile, diğer bir kısmı ise gelmek üzere! Bunların ilk ikisi yine Euler'in keşfi.

1) V köşesi, E kenarı ve F yüzü olan herhangi bir çokyüzlüde (yüzleri düzgün, kenarları düz çizgilerden oluşan ve keskin köşelere sahip bir katı cisim için)

$$V - E + F = 2$$

Örneğin, bir kübün 8 köşesi, 12 kenarı ve 6 yüzü vardır, bunları yazarsak

$$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

sağlanır.

2) 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + ··· = π^2/16

3) 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5+ ··· = ∞

4) 0.99999... = 1

5) $n!$ için Stirling yaklaşımı

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

6) n.inci Fibonacci sayısı için Binet formülü:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Sanal *i* Sayısı: Karekök *-1*

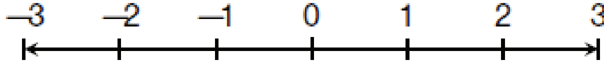
Sanal i sayısı gizemli bir özelliğe sahiptir

$$i^2 = -1$$

İnsanlar bunu ilk duyduğunda imkânsız olduğunu düşünmeye meyillidirler. Nasıl bir sayının kendisi ile çarpımı negatif olabilir? Eğer $0^2 = 0$ eşitliği bir kenara konulursa, herhangi bir negatif sayının dahi kendisi ile çarpımı pozitiftir. Ancak bu fikri tümüyle reddetmeden önce hayatınızda negatif sayıların da imkânsız olduğunu düşündüğünüz bir dönemin olmuş olabileceğini göz ardı etmeyin (matematikçilerin çoğu

yüzyıllarca böyle düşündü). Bir sayının *0*'dan daha küçük olmasının anlamı nedir? Nasıl olur da *hiçbir şeyden* daha küçük bir şeyler olabilir? Sonunda sayıları reel eksene yerleştirerek, *0*'ın sağındakileri pozitif sayılar, *0*'ın solundakileri negatif sayılar olarak görmeye başladınız. Benzer biçimde *i*'yi anlamlandırmak için, hapsolduğumuz sınırların (düşünme alışkanlıklarının) dışında düşünmeye ihtiyacımız var. Bunu başardığımız anda aslında *i*'nin ne kadar *gerçek* bir öneme sahip olduğunu da göreceğiz.

Ben'*i*' görebiliyor musun!



Reel eksen sanal sayıları içermez. Nerede saklanıyor olabilirler?

Biz *i* sayısına bir *sanal sayı* diyeceğiz. Bir sayının karesi bir negatif sayı ise bu sayıya sanal sayı denilir. Örneğin sanal 2*i* sayısı için (2*i*) (2*i*) = -4 sağlanır. Sanal sayıların cebiri tıpkı reel sayıların cebirine benzer. Misal,

$$3i + 2i = 5i\,, \quad 3i - 2i = i\,, \quad 2i - 3i = -1i = -i$$

ve

$$3i \times 2i = 6i^2 = -6\,, \quad \frac{3i}{2i} = 3/2$$

Bu arada aklımıza gelmişken belirtelim, *-i* sayısının da karesi *-1* olur, çünkü $(-i)(-i) = i^2 = -1$. Bir reel sayının bir sanal sayı ile çarpımının sonucunu tahmin etmek zor değildir. Örneğin, $3 \times 2i = 6i$.

Peki, reel ve sanal sayıları toplarsak ne olur? Mesela *3* ile *4i* toplamı? Cevap dümdüz $3 + 4i$ olur ve daha sade ifade etmek mümkün değildir (aynen $1+\sqrt{3}$ sayısını daha sade ifade edemediğimiz gibi). *a* ve *b* sayıları reel sayılar olmak üzere $a + bi$ biçimindeki sayılara *karmaşık sayılar* denir. Dikkat ederseniz reel ve sanal sayılar, karmaşık sayıların birer özel halidir (sırasıyla $b = 0$ ve $a = 0$ durumlarına karşılık gelirler). Dolayısıyla π reel sayısı ve *7i* sanal sayısı aynı zamanda karmaşık sayılardır.

Hadi biraz (çok değil) karmaşık aritmetik yapalım, toplama ve çıkarma ile başlayalım:

$$(3+4i)+(2+5i) = 5+9i$$
$$(3+4i)-(2+5i) = 1-i$$

Çarpma için 2. Bölüm'deki cebirsel tekniklerden FOIL kuralını kullanalım.

$$(3 + 4i)(2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i^2$$
$$= (6 - 20) + (15 + 8)i$$
$$= -14 + 23i$$

Karmaşık sayılar hesaba katıldığında, bütün $ax^2 + bx + c$ ikinci derece polinomların iki tane kökü (veya bir tane katlı kökü) vardır. İkinci derece denklem formülünden,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

değerlerinde polinomun sıfır olduğunu biliyoruz. 2. Bölüm'de, eğer karekökün içindeki sayı negatif ise reel kök olmadığını söylemiştik. Ancak artık negatif karekökleri dert etmiyoruz. Örneğin $x^2 + 2x + 5$ denkleminin kökleri

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

biçimindedir. Bu arada *a, b* ve *c* sayıları karmaşık olduklarında dahi ikinci dereceden denklem formülünün geçerli olduğunu söylemeden geçmeyelim.

İkinci derece polinomların daima en azından bir kökü vardır (kök bazen karmaşık da olabilir). Sıradaki teorem ise bunun neredeyse bütün polinomlar için doğru olduğunu söylüyor.

Teorem (Cebirin temel teoremi): Derecesi *1* veya daha büyük olan her $p(x)$ polinomunun $p(z) = 0$ olacak biçimde bir z kökü vardır.

Birinci dereceden bir polinom, örneğin $3x - 6$ çarpanlarına $3(x - 2)$ şeklinde ayrılabilir, böylece 2 sayısı $3x - 6$ polinomunun tek köküdür. Genel olarak, $a \neq 0$ olmak üzere, $ax - b$ polinomu $a(x - (b/a))$ biçiminde çarpanlarına ayrılır ve burada b/a sayısı $ax - b$ polinomunun köküdür.

Benzer şekilde $ax^2 + bx + c$ biçimindeki bütün ikinci dereceden polinomları

$$a(x - z_1)(x - z_2)$$

şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz, burada z_1 ve z_2 (karmaşık veya aynı olmaları da ihtimal dâhilinde) polinomun kökleridir. Cebirin temel teoreminin bir sonucu bunun hangi dereceden olursa olsun bütün polinomlar için doğru olduğunu söyler.

Sonuç: Derecesi $n \geq 1$ olan her polinom n-tane çarpana ayrılabilir. Özel olarak, başkatsayısı $a \neq 0$ olan n-inci dereceden bir $p(x)$ polinomu verilsin. Bu durumda

$$p(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n)$$

eşitliği sağlanacak biçimde n-tane $z_1, z_2, \dots, z_n$ sayıları vardır. Bu sayıların bazıları birbirine eşit ve/veya karmaşık sayı olabilirler. Bu z_i sayıları polinomun kökleridir, yani $p(z_i) = 0$ eşitliği sağlanır.

Bu sonuç şunu söyler, derecesi $n \geq 1$ olan her polinomun en az bir tane, en fazla n tane farklı kökü olabilir. Örneğin derecesi *4* olan $x^4 - 16$ polinomu şöyle çarpanlarına ayrılabilir:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

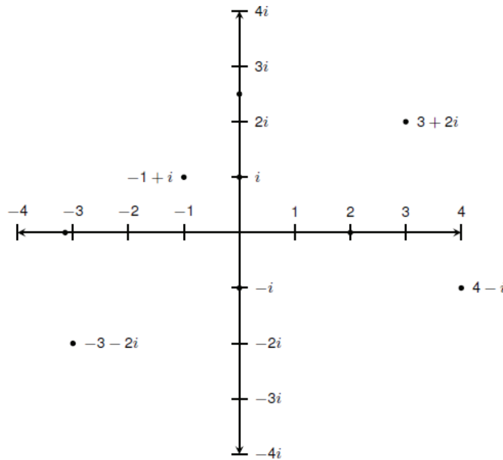
yani *2, -2, 2i, -2i* olmak üzere dört tane faklı kökü vardır. Diğer taraftan $3x^3 + 9x^2 - 12$ polinomu üçüncü dereceden olup çarpanlarına

$$3x^3 + 9x^2 - 12 = 3(x^2 + 4x + 4)(x - 1) = 3(x + 2)^2 (x - 1)$$

şeklinde ayrılır. Bu polinomun da *-2* ve *1* olmak üzere iki farklı kökü vardır.

Karmaşık Sayıların Geometrisi

Karmaşık düzlemi çizerek karmaşık sayıları hayalimizde canlandırabiliriz. Aslında bu cebirden alışkın olduğumuz (x, y) düzleminin çok benzeridir, yalnız y-ekseni 0, $\pm i$, $\pm 2i$ gibi sayıların yer aldığı sanal eksen ile değiştirilmiştir. Aşağıdaki grafikte bazı karmaşık sayıları çizdik.



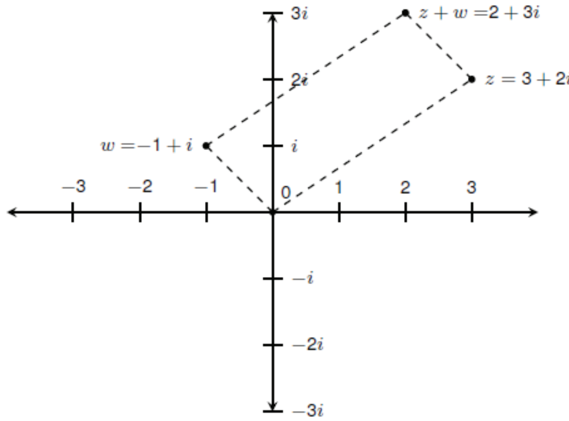
Karmaşık düzlem üzerinde bazı sayılar

Karmaşık sayılarla toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapmanın sayısal olarak ne kadar kolay olduğunu gördük. Ancak bu sayılara karşılık gelen karmaşık düzlemdeki noktalara bakarak söz konusu işlemleri geometrik olarak da yapabiliriz.

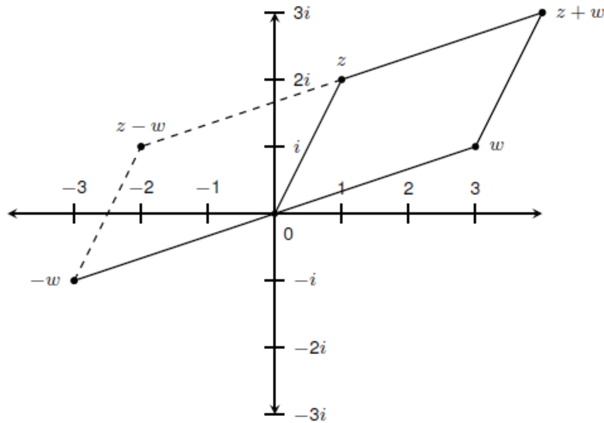
Örneğin,

$$(3+2i)+(-1+i)=2+3i$$

toplama işlemini ele alalım. Aşağıdaki şekle dikkat ederseniz 0, 3 + 2*i*, 2 + 3*i* ve -1 + *i* noktaları bir paralelkenarın köşelerini oluştururlar.



Genellikle, herhangi iki *z* ve *w* karmaşık sayılarını geometrik olarak toplarken bir önceki örnekte olduğu gibi bir paralelkenar çizeriz. Çıkarmada *z* - *w* farkını hesaplamak için önce - *w* noktasını çizeriz (ki bu *w* değerinin orjine göre simetriğidir) ve sonra *z* noktasına - *w* noktasını aşağıda gösterildiği gibi ekleriz.

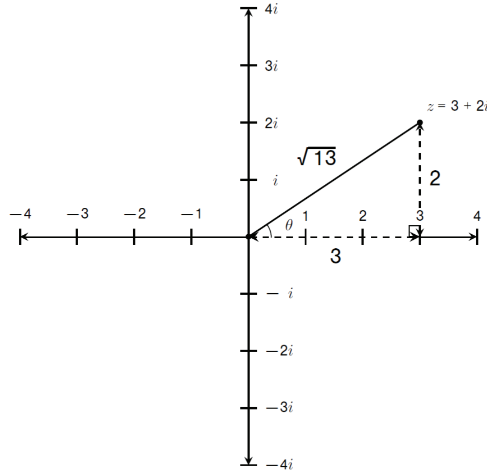


Karmaşık sayılar paralelkenarlar çizilerek toplanıp çıkarılabilir.

Karmaşık sayıları geometrik olarak çarpmak veya bölmek için öncelikle büyüklüklerini ölçmeliyiz. Bir z karmaşık sayısının *boyunu* (veya *büyüklüğünü*) orijin yani 0 noktası ile z noktasını birleştiren doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlayıp $|z|$ ile göstereceğiz. Mesela $z = a + ib$ ise Pisagor teoreminden z karmaşık sayısının uzunluğu

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olur. Örneğin aşağıdaki grafik üzerinde de gösterildiği gibi, $3 + 2i$ noktasının uzunluğu $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ bulunur. Dikkat edersek $3 + 2i$ noktasına karşılık gelen θ açısı için $\tan\theta = 2/3$ sağlanır. Böylece $\theta = \tan^{-1} 2/3 \approx 33.7^{\circ}$ veya yaklaşık 0.588 radyan bulunur.

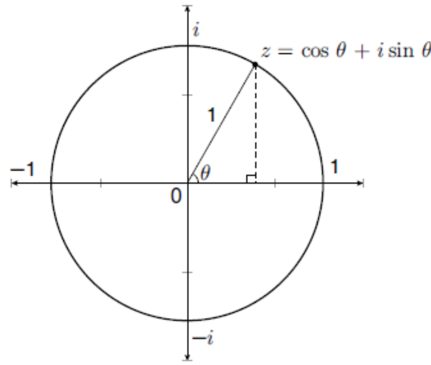


$3 + 2i$ karmaşık sayısının uzunluğu $\sqrt{13}$ ve $\tan\theta = 2/3$ olmak üzere açısı θ olur

Eğer uzunluğu 1 olan noktalar çizilirse, aşağıda gösterildiği üzere, karmaşık düzlemdeki *birim çember* elde edilir. Birim çember üzerinde, açısı θ olan karmaşık sayı nedir? Eğer x-y Kartezyen düzlem söz konusu olsaydı, dokuzuncu bölümde gördüğümüz üzere, bu nokta $(\cos\theta, \sin\theta)$ olurdu. Dolayısıyla karmaşık düzlemde bu nokta $\cos\theta + i\sin\theta$ olur. Aynı şekilde, uzunluğu R olan herhangi bir karmaşık sayı şu formdadır:

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Buna bir karmaşık sayının *kutupsal formu* denir. Belki bunu şimdi söylememek daha iyi olurdu ama bu bölümün sonunda bunun $Re^{i\theta}$ ifadesine eşit olduğunu göreceğiz. (spEuler vermiş oldum!)



Karmaşık düzlemde birim çember

Şunu vurgulamakta fayda var, karmaşık sayılar çarpıldığında uzunlukları da çarpılır.

Teorem: İki karmaşık sayı z_1 ve z_2 için $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$'dir. Başka bir ifade ile *çarpımın uzunluğu uzunlukların çarpımıdır.*

KOYU MATEMATİK

Kanıt: $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olsun. Bu durumda $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$ olur.

Böylece

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= |(a+ib)(c+id)| = |(ac-bd)+i(ad+bc)| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} \\
&= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{c^2+d^2} \\
&= |z_1|\,|z_2|
\end{aligned}
$$



Örneğin,

$$
\begin{aligned}
|(3+2i)(1-3i)| &= |9-7i| = \sqrt{9^2+(-7)^2} = \sqrt{130} \\
&= \sqrt{13}\sqrt{10} = |3+2i|\,|1-3i|
\end{aligned}
$$

Peki çarpımın açısı ne olur? Bir z karmaşık sayısının x-ekseninin pozitif kısmı ile yaptığı açı genellikle arg z ile gösterilir. Örneğin daha önce gördüğümüz üzere arg(3 + 2*i*) = 0.588 radyandır. Benzer biçimde 1 - 3*i* karmaşık sayısı 4. bölgede olduğundan açısı $\tan\theta = -3$ eşitliğini sağlar ve buradan arg(1-3*i*) = $\tan^{-1}(-3) = -71.56^\circ = -1.249$ radyan çıkar.

Dikkat edersek (3 + 2*i*)(1 - 3*i*) = (9 - 7*i*) ve açısı $\tan^{-1}(-7/9) = -37.87^\circ = -0.661$ radyandır, ki bu tam olarak 0.588 + (- 1.249) sayısıdır.

Aşağıdaki teoreme göre bu bir rastlantı değildir!

Teorem: İki karmaşık sayı z_1 ve z_2 için $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$'dir. Başka bir ifade ile *çarpımın açısı açıların toplamıdır.*

Aşağıdaki kutucukta verdiğimiz kanıt bir önceki bölümdeki trigonometrik özdeşliklere dayanır.

KOYU MATEMATİK

Kanıt: z_1 ve z_2, sırasıyla uzunlukları R_1 ve R_2, açıları θ_1 ve θ_2 olan iki karmaşık sayı olsun. Şimdi $z_1$ve z_2 sayılarını kutupsal biçimde yazalım

$$z_1 = R_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad z_2 = R_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Böylece

$$z_1 z_2 = R_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, R_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= R_1R_2\left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\right]$$

$$= R_1R_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))\right]$$

olur. Son adımda geçen bölümde elde ettiğimiz $\cos(A+B)$ ve $\sin(A+B)$ formüllerini kullandık. Eşitliğin sonucu olarak $z_1 z_2$ sayısının uzunluğunun R_1R_2 (bunu zaten biliyoruz) ve açısının $\theta_1 + \theta_2$ olduğu gösterilmiş olur. □

Özetlersek, iki karmaşık sayıyı çarpmak demek basitçe *uzunluklarını çarpmak ve açılarını toplamaktır.* Mesela bir sayıyı *i* ile çarparsak uzunluğu aynı kalır ancak açısı 90° artar. Reel sayıları birbiri ile çarptığımızda şunları unutmayalım; pozitif sayıların açıları 0° (veya denk olarak 360°) ve negatif sayıların açıları ise 180°'dir. İki tane 180° açıyı toplarsak 360° elde ederiz,

ki bu da negatif iki sayının çarpımının pozitif olduğunu söylemenin bir başka yoludur. Sanal sayıların açıları ise 90° veya -90° (veya 270°) olur. Böylece bir sanal sayıyı kendisiyle çarpınca elde edilen açı 180° olur (çünkü 90° + 90° = 180° veya -90° -90° = -180° ki bu da 180° ile aynıdır), yani çıkan sayı negatiftir. Son olarak şunu da not edelim eğer z sayısının açısı θ ise $1/z$ sayısının açısı $-\theta$ olur (Neden? Çünkü $z.(1/z) = 1$ olduğundan z ve $1/z$ sayılarının açıları toplamı 0° olmalıdır.) Böylelikle, karmaşık sayıları böldüğünüzde, uzunluklarını bölüp açılarını çıkarmalısınız. Dolayısıyla z_1/z_2 karmaşık sayısının uzunluğu R_1/R_2 ve açısı $\theta_1 - \theta_2$ olur.



e'nin Sihri

Eğer bilimsel hesap makineniz varsa lütfen aşağıdaki denemeyi yapınız.

1. Aklınızda tutabileceğiniz yedi-haneli bir sayıyı hesap makinenize girin (bir telefon numarası veya kimlik numaranızı girebilirsiniz veyahut sevdiğiniz bir rakamı yedi defa tekrarlı yazabilirsiniz).
2. Bu sayıyı ters çevirin (hesap makinenizdeki $1/x$ tuşuna basın).
3. Bulduğunuz sayıya 1 ekleyin.
4. Şimdi bu sayının ilk tuttuğunuz yedi haneli sayı kadar kuvvetini alın (x^y tuşuna basın, yedi haneli sayınızı girin, eşittir işaretine basın).

Sonuç 2.718 ile mi başlıyor? Aslında sonucunuzun baştan epeyce bir hanesi

$$e = 2.718281828459045...$$

irrasyonel sayısı ile çakışıyorsa bu benim için sürpriz olmaz.

Peki neyin nesi bu gizemli *e* sayısı ve neden önemli? Sihirli numaramızda yaptığınız şey büyük bir n sayısı için

$$(1 + 1/n)^n$$

sayısını hesaplamaktı. Şimdi, *n* giderek büyürse bu sayıya ne olmasını beklersiniz? "Bir" tarafta, *n* büyüdüğünde $(1 + 1/n)$ sayısı küçülerek 1'e yaklaşır ve ayrıca üssü *1*'den herhangi bir *n* sayısına yükseltirsek, hala *1* civarında kalırız. Dolayısıyla çok büyük *n* değerleri için $(1 + 1/n)^n$ değerinin yaklaşık 1 olacağını beklemek garip olmaz. Örneğin, $(1.001)^{100} \approx 1.105$.

Diğer taraftan, *n* ne kadar büyük olursa olsun $(1 + 1/n)$ değeri hala 1'den büyüktür. Eğer 1'den büyük belirli bir sayının kuvvetini giderek büyütürseniz elde ettiğiniz değerler de giderek büyür. Örneğin, $(1.001)^{10000}$ sayısı 20000'den büyüktür.

Buradaki problem şu, tabandaki $(1 + 1/n)$ küçülürken *aynı anda* üs durumundaki *n* ise giderek büyüyor. Dolayısıyla 1 ile sonsuz arasında ortaya çıkan halat çekme yarışında sonuç giderek $e = 2.71828...$ sayısına yaklaşıyor. Örneğin, $(1.001)^{1000} \approx 2.717$ olur. Hadi büyük *n* değerleri için $(1 + 1/n)^n$ sayısının aşağıdaki tabloda verilen değerlerine bakalım.

n	$(1 + 1/n)^n$
10	$(1.1)^{10} = 2.5937424...$
100	$(1.01)^{100} = 2.7048138...$
1000	$(1.001)^{1000} = 2.7169239..$
10000	$(1.0001)^{10000} = 2.7181459...$
100000	$(1.00001)^{100000} = 2.7182682...$
1000000	$(1.000001)^{1000000} = 2.7182805...$
10000000	$(1.0000001)^{10000000} = 2.7182817...$

Böylece *e* sayısını, *n* arttırıldığında $(1+1/n)^n$ değerlerinin yaklaştığı sayı olarak tanımlayacağız. Matematikçiler bunu, *n* sonsuza giderken $(1+1/n)^n$ dizisinin *limiti* olarak adlandırır ve

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$$

ile gösterir. Eğer $1/n$ kesrini bir x reel sayısı için x/n ile değiştirirsek, n/x giderek büyüyeceğinden $(1 + x/n)^{n/x}$ ifadesi de giderek e sayısına yaklaşır. Her iki tarafın kuvvetini x'e yükseltirsek (ve $(a^b)^c = a^{bc}$ olduğunu hatırlarsak) adına *üstel formül* dediğimiz aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\lim_{n \to \infty} (1 + x/n)^n = e^x$$

Üstel formülü bir defa elde ettikten sonra sonuçlarını *faiziyle* alacağız! Varsayalım ki 10000 dolarınız var ve bunu 0.06 faiz oranıyla (yani, yılda yüzde 6) bir yatırım hesabına koydunuz. Eğer faiz yıllık olarak uygulanırsa, bir yılın sonunda, 10000(1.06) = 10600 dolarınız olur. İki yıl sonra, bu yeni miktarın yüzde altısı kadar daha kazanacaksınız, $10000(1.06)^2 = 11236$ dolarınız olur. Üç yıl sonra, $10000(1.06)^3 = 11910.16$ dolarınız olur. Böylece t yıl sonra,

$$10000(1.06)^t$$

dolarınız olur. Daha genel olarak ifade edersek, 0.06 faiz oranını bir r faiz oranı ile değiştirelim ve başlangıçta da P dolarımız olsun, böylece t yılın sonunda sahip olacağınız dolar miktarı

$$P(1+r)^t$$

olur. Şimdi varsayalım ki yüzde altılık faiz, yılda iki kez bileşik faiz olarak uygulanıyor; yani her altı ayda yüzde üç kazanıyorsunuz. Dolayısıyla bir yılın sonunda $10000(1.03)^2 = 10609$ dolarınız olur, ki bu yıllık bileşik faizden kazanılan 10600 dolardan biraz daha fazladır. Eğer paranızı yılda dört kere bileşik faiz uygulanacak biçimde yatırırsanız bir yılda dört defa yüzde 1.5 kazanacağınız için, $10000(1.015)^4 = 10613.63$ dolarınız olur. Daha genel olarak, paranızı yılda n defa bileşik faiz uygulanacak biçimde faize yatırırsanız, bir yılın sonunda

$$10000\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^n$$

dolarınız olur. Burada n sayısının çok büyük seçilmesiyle elde edilen faize *sürekli* bileşik faiz denilir. Üstel formül yardımıyla bir yıl sonunda elinize geçecek miktarı hesaplarsak,

$$10000 \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{0.06}{n})^n = 10000e^{0.06} = 10618.36$$

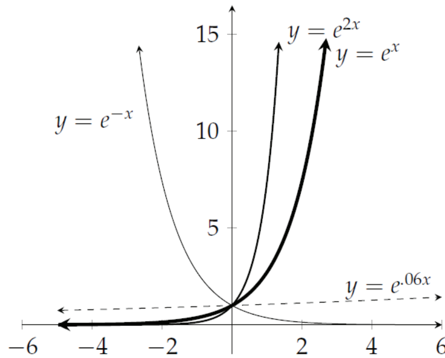
dolar olur. Detayları aşağıdaki tablodan görebilirsiniz.

Ana para	**Faiz**	**Bileşim**	**Bir yıl sonundaki miktar**
10000 $	%6	Yıllık	10000(1.06) $ = 10600.00 $
10000 $	%6	Yılda iki kez	$10000(1.03)^2$ $ = 10609.00 $
10000 $	%6	Yılda dört kez	$10000(1.015)^4$ $ = 10613.83 $
10000 $	%6	Aylık	$10000(1.005)^{12}$ $ = 10616.77 $
10000 $	%6	n defa	$10000 \lim(1 + \frac{0.06}{n})^n$ $
10000 $	%6	Sürekli	$10000e^{0.06}$ $ = 10618.36 $

Daha genel olarak, başlangıçta anaparanız P dolar ve paranıza r oranında sürekli bileşik faiz uygulanırsa, t yıl sonunda, aşağıdaki formülle hesaplananan A dolarınız olur:

$$A = Pe^{rt}$$

Aşağıdaki grafikte görüldüğü gibi $y = e^x$ fonksiyonu çok hızlı büyür. Bu fonksiyonla birlikte $y = e^{2x}$ ve $y = e^{0.06x}$ fonksiyonlarının da grafikleri verdik. Bu fonksiyonlar için üstel hızla büyüyor deriz. Bunun yanında $y = e^{-x}$ fonksiyonunun grafiği ise çok hızla sıfıra gider ve üstel azalış gösterir.



Birkaç üstel fonksiyon

Peki 5^x fonksiyonunun grafiği nasıl olur? $e < 5 < e^2$ eşitsizliğinden 5^x fonksiyonunun grafiği e^x ile e^{2x} fonksiyonlarının arasındadır. Daha da ayrıntıya inecek olursak $e^{1.609...} = 5$ olduğundan $5^x \approx e^{1.609x}$'dir. Genel olarak, $a = e^k$ eşitliğini sağlayacak bir k kuvveti bulunduktan sonra herhangi bir a^x fonksiyonu bir e^{kx} üstel fonksiyonu biçiminde ifade edilebilir. Bu k sayısını nasıl bulabiliriz? *Logaritma* kullanılarak.

Nasıl ki karekök alma, kare alma fonksiyonunun tersi ise (çünkü birbirinin yaptığı işlemi geri alıyorlar), logaritma da üstel fonksiyonun tersidir. En yaygın kullanılan logaritma 10 tabanındaki logaritmadır ve $\log x$ ile gösterilir. Şöyle ifade ederiz, eğer

$$10^y = x \text{ } ise \text{ } y = \log x$$

yazılır veya denk olarak,

$$10^{\log x} = x$$

Örneğin, $10^2 = 100$ eşitliğinden $\log 100 = 2$ olur. Şimdi kullanışlı bir logaritma tablosu verelim.

Logaritma	**Açıklama**
log 1 = 0	Çünkü $10^0 = 1$
log 10 = 1	Çünkü $10^1 = 10$
log 100 =2	Çünkü $10^2 = 100$
log 1000 = 3	Çünkü $10^3 = 1000$
log (1/10) = -1	Çünkü $10^{-1} = 1/10$
log 0.01 = -2	Çünkü $10^{-2} = 0.01$
log $\sqrt{10}$ = 1/2	Çünkü $10^{1/2} = \sqrt{10}$
log $10^x = x$	Çünkü $10^x = 10^x$
log 0 tanımsızdır	Çünkü $10^y = 0$ olacak biçimde bir y yoktur

Logaritmanın çok kullanışlı olmasının gerekçelerinden bir tanesi, büyük sayıları, beynimizin daha kolay kavrayabileceği çok daha küçük sayılara dönüştürmesidir. Örneğin, depremlerin şiddetini 1 ile 10 arasında derecelendirmemizi sağlayan Richter ölçeği logaritmayı kullanır. Logaritma ayrıca, sesin şiddetinin ölçülmesinde (desibel ile), bir kimyasal

çözeltinin asitlik derecesinin belirlenmesinde (pH), ve hatta Google PageRank algoritması kullanılarak bir internet sayfasının popülerliğinin tespit edilmesinde kullanılır.

Acaba $\log 512$ kaçtır? Herhangi bir bilimsel hesap makinesi (hatta çoğu arama motoru) size $\log 512 = 2.709...$ olduğunu söyleyecektir. Bu sonuç gayet makul çünkü 512 sayısı 10^2 ile 10^3 arasında olduğundan logaritması da 2 ile 3 arasında olacaktır. Logaritmanın çarpımsal problemleri daha kolay toplamsal problemlere dönüştüren bir araç olduğu da keşfedilmiştir. Bu söylediğimiz aşağıdaki kullanışlı teoreme dayanır.

Teorem: Herhangi x ve y pozitif sayıları için

$$\log xy = \log x + \log y$$

eşitliği sağlanır, yani çarpımın logaritması logaritmaların toplamıdır.

Kanıt: Bu doğrudan üslerle ilgili kuraldan gelir, şöyle ki

$$10^{\log x + \log y} = 10^{\log x}\, 10^{\log y} = xy = 10^{\log xy}$$

Yani 10 sayısının üssü $\log x + \log y$ yapılınca bu xy değerini verir, bu da istenendir. □

Bir diğer önemli özellikte *üs özelliği*dir.

Teorem: Herhangi bir pozitif x sayısı ve herhangi bir n tamsayısı için,

$$\log x^n = n\log x$$

Kanıt: Üslü sayılar için $a^{bc} = (a^b)^c$ özelliğini biliyoruz. Buradan

$$10^{n\log x}\,(10^{\log x})^n = x^n$$

olur, böylece x^n ifadesinin logaritması $n\log x$ çıkar. □

Kimyada, jeoloji gibi fiziksel bilimlerde çok yaygın bir kullanım alanı olsa da 10 tabanındaki logaritmayı özel yapan bir durum yoktur. Hatta bilgisayar bilimlerinde ve ayrık matematikte 2 tabanındaki logaritma daha meşhurdur. Herhangi bir $b > 0$ sayısı için, b tabanındaki logaritma $\log_b$ şu kuralla tanımlanır,

$$b^y = x \text{ ise } y = \log_b x$$

Örneğin, $2^5 = 32$ olduğundan $\log_2 32 = 5$ olur. Daha önce bahsedilen logaritmanın bütün özellikleri herhangi bir b tabanında da geçerlidir. Örneğin,

$$b^{\log_b x} = x \qquad log_b xy = log_b x + log_b y \qquad log_b x^n = nlog_b x$$

Bununla birlikte, matematiğin birçok alanında, fizikte ve mühendislikte en kullanışlı logaritma $b = e$ tabanındaki logaritmadır. Bu logaritmaya doğal logaritma adı verilir ve ln x ile gösterilir. Yani

$$e^y = x \text{ ise } y = lnx$$

veya denk olarak, herhangi bir x reel sayısı için,

$$lne^x = x$$

Örneğin, hesap makineniz ln5 = 1.609... eşitliğini verir, ki biz de daha önce $e^{1.609} \approx 5$ olarak tanımlamıştık. Doğal logaritma hakkında daha fazlasını 11. Bölüm'de söyleyeceğiz.

KOYU MATEMATİK

Bilimsel hesap makinelerinin tamamı doğal logaritma ve 10 tabanındaki logaritmayı hesaplar, ancak birçoğu diğer tabanlardaki logaritmaları kesin bir şekilde hesaplamaz. Ancak bu sorun değil, çünkü bir tabanda verilen logaritmayı başka bir tabana çevirmenin kolay bir yolu var. Temel olarak, bir logaritmayı biliyorsanız, hepsini biliyorsunuz. Özel olarak, sadece 10 tabanındaki logaritmayı kullanarak b tabanındaki logaritmayı aşağıdaki kural yardımıyla tanımlayabiliriz.

Teorem: Herhangi b ve x pozitif sayıları için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

Kanıt: Şimdi $y = \log_b x$ diyelim. Böylece $b^y = x$ olur. Her iki tarafın logaritmasını alırsak, $\log b^y = \log x$ ve buradan da üs kuralı ile, $y \log b = \log x$ çıkar. Buradan istediğimiz $y = \frac{\log x}{\log b}$ sonucuna ulaşırız. ☐

Örneğin, herhangi bir $x > 0$ için,

$$\ln x = (\log x)/(\log e) = (\log x)/(0.434...) \approx 2.30 \log x$$

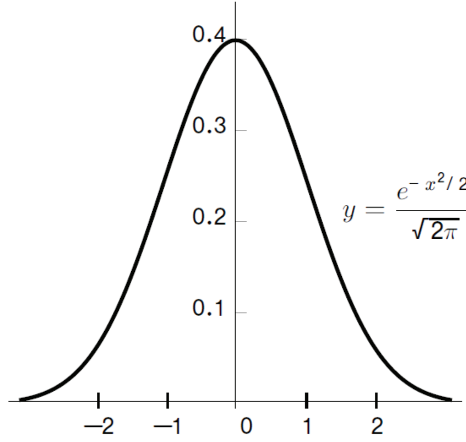
$$\log_2 x = (\log x)/(\log 2) = (\log x)/(0.301...) \approx 3.32 \log x$$

e'nin Ortaya Çıktığı Başka Yerler

Aynen π sayısı gibi e sayısı da matematiğin damarlarına nüfuz etmiştir ve umulmadık yerlerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin 8. Bölüm'de gördüğümüz

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

formülü ile verilen çan eğrisi. Bu eğrinin aşağıda verilen grafiği belki de istatistik alanının en önemli grafiğidir.



$e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ formülü ile verilen çan eğrisi

Yine 8. Bölüm'de *n!* için verilen *Stirling Yaklaşımı'*nda *e* sayısının ortaya çıktığını görmüştük:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

11. Bölüm'de göreceğimiz üzere, *e* sayısı faktöriyel fonksiyonuna temelden bağlıdır. e^x fonksiyonunun aşağıdaki sonsuz seri açılımına sahip olduğunu göstereceğiz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Bu formülde özel olarak $x = 1$ alırsak,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

eşitliğini elde ederiz, bu eşitlik ile *e* sayısının basamaklarını çok hızlı bir şekilde belirleyebiliriz.

Bu arada *e* sayısının basamakları tekrarlı bir düzende başlar,

$$e = 2.718281828...$$

Bunu ortaokuldaki Türkçe öğretmeniniz "2.7 Jules Verne, Jules Verne", veya lisedeki edebiyat öğretmeniniz "2.7 Lev Tolstoy, Lev Tolstoy" biçiminde söylemeyi tercih edebilirdi, çünkü meşhur çocuk kitabı Seksen Günde Devr-i Âlem'in yazarı Jules Verne ve meşhur Savaş ve Barış kitabının yazarı Lev Tolstoy 1828'de doğmuşlardır. (Aslında benim açımdan hatırlatıcı ipuçları diğer yönde de işe yarar. Jules Verne ve Lev Tolstoy'un doğum tarihlerini *e* sayısının basamaklarından hatırlarım.) Belki de *e*'nin rasyonel olduğunu, 1828 basamak dizisinin sonsuza kadar tekrar edeceğini düşünmüş olabilirsiniz, ancak bu doğru değil. e sayısının bundan sonra gelen altı basamağı …459045…, biçimindedir ki bunu da ikizkenar bir dik üçgenin açılarının ölçülerinden hatırlıyorum.

Bunların ötesinde *e* sayısı karşılaşacağınızı ummadığınız anda bazı olasılık problemlerinde de kendisini gösterir. Örneğin, varsayalım ki her hafta bir piyango bileti alıyorsunuz ve bir ödül kazanma şansınız da 100'de 1. Eğer 100 hafta üst üste bilet alırsanız en az bir defa ödül kazanma şansınız nedir? Her hafta kazanma olasılığınız 1/100 = 0.01 ve kaybetme şansınız da 99/100 = 0.99. Herhangi bir hafta kazanma şansınız önceki haftalardakinden bağımsız olduğu için, 100 hafta üst üste kaybetme şansınız

$$(0.99)^{100} \approx 0.3660$$

bulunur, ki bu

$$1/e \approx 0.3678794\ldots$$

sayısına çok yakındır. Bu bir rastlantı değil. e^x fonksiyonunu ilk tanıttığımız

$$\lim_{n \to \infty} (1 + x/n)^n = e^x$$

üstel formülünü hatırlarsınız, bu formülde $x = -1$ alırsak, herhangi büyük bir n sayısı için,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \approx e^{-1} = 1/e$$

olur. Eğer $n = 100$ ise bu formül iddia edildiği gibi $(0.99)^{100} \approx 1/e$ olduğunu söyler. Yani sonuçta kazanma şansınız $1-(1/e) \approx 0.64$ çıkar.

Benim favori olasılık problemlerimden birisi, *eşleşme problemi* (veya vestiyer problemi veya yeniden düzenleme problemi) adıyla anılan problemdir. Varsayalım ki bir öğretmen bir sınıfa verdiği *n* tane ev ödevini değerlendirdi ve sınıfta ödevleri dağıtırken tembellik yapıp her ödevi sahibine vermek yerine rastgele dağıttı (dolayısıyla bir öğrenciye kendi ödevi ya da bir başkasının ödevi gelmiş olabilir). Hiçbir öğrenciye kendi ödevinin gelmeme olasılığı kaçtır? Başka bir ifade ile, 1'den *n*'ye kadar olan sayılar rastgele karıştırıldığında hiçbir sayının kendi doğal sırasına gelmeme olasılığı nedir? Örneğin, $n = 3$ olsun, 1, 2, 3 sayıları $3! = 6$ farklı şekilde sıralanabilir, hiçbir sayının kendi doğal sırasına gelmeyeceği 2 *düzenleme* vardır, bunlar 231 ve 312 olur. Yani, $n = 3$ için aradığımız düzenlemenin olasılığı $2/6 = 1/3$ bulunur.

İlk sorumuza dönersek, *n* tane ödev *n*! farklı biçimde dağıtılabilir. D_n ile aradığımız düzenlemelerin sayısını gösterirsek, hiçbir öğrenciye kendi ödevinin gelmemesi olasılığı $p_n = D_n/n!$ bulunur, bunlar:

2143 2341 2413 3142 3412 3421 4123 4312 4321

Dolayısıyla aşağıdaki listede de gösterildiği üzere $p_4 = D_4/4! = 9/24 = 0.375$ bulunur.

n	D_n	$p_n = D_n/n!$
1	0	0
2	1	1/2 = 0.50000
3	2	2/6 = 0.33333
4	9	9/24 = 0.37500
5	44	44/120 = 0.36667
6	265	265/720 = 0.36806
7	1856	1865/5040 = 0.36825
8	14887	14887/40320 = 0.36823

Tablo incelenirse, *n* giderek büyüdüğünde p_n değerlerinin de giderek $1/e$ sayısına yaklaştığı görülür. Bunun derinindeki anlam ise müthiş. Sı-

nıfta ister 10 ister 100 isterse bir milyon öğrenci olsun, hiç kimseye kendi ödevinin denk gelmemesi olasılığı neredeyse aynı! Bu şans 1/*e* sayısına gerçekten ama gerçekten yakın.

Peki, 1/*e* nerden çıktı? İlk yaklaşım olarak, *n* öğrenci olduğundan her öğrenciye kendi ödevinin denk gelmesi ihtimali 1/*n*'dir, dolayısıyla başka birinin ödevinin gelmesi ihtimali ise 1 - (1/*n*) olur. Böylelikle *n* tane öğrenciye başkasının ödevinin gelme olasılığı

$$p_n \approx \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx 1/e$$

Buradaki olasılık yaklaşık bir değerdir, çünkü piyango problemindeki gibi olaylar birbirinden tamamen bağımsız değiller. Eğer 1 numaralı öğrenciye kendi ödevi denk gelirse, 2 numaralı öğrenciye de kendi ödevinin denk gelmesi ihtimali birazcık artar. (Olasılık $\frac{1}{n}$ yerine $\frac{1}{n-1}$ olur.) Benzer biçimde eğer 1 numaralı öğrenciye kendi ödevi denk gelmezse 2 numaralı öğrenciye kendi ödevinin gelme ihtimali çok az olsa da düşer. Ancak olasılıklar çok fazla değişmediğinden, yaklaşım gayet iyi sonuç verir.

Bu p_n olasılığının gerçek değeri için e^x fonksiyonunun sonsuz seri açılımı kullanılır,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Bu eşitlikte $x = -1$ alınırsa,

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots = e^{-1} = 1/e$$

elde edilir.

Öğrenci sayısı *n* olduğunda, hiçbir öğrenciye kendi ödevinin gelmemesi ihtimalinin tam olarak

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

olduğu gösterilebilir. Örneğin $n = 4$ durumunda $p_4 = 1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 =$ 9/24 bulunur ki bu daha önce dört öğrenciye karşılık gelen durum olarak

gösterilmişti. $1/e$ inanılmaz bir hızla yakınsar. p_n ile $1/e$ arasındaki fark $1/(n+1)!$ değerinden daha küçüktür. Yani p_4 olasılığı $1/e$ sayısının $1/5! = 0.0083$ komşuluğundadır; P_{10} ile $1/e$ sayısının virgülden sonraki yedi basamakları aynıdır, p_{100} ise $1/e$ ile virgülden sonraki 150 basamakta aynıdır.

KOYU MATEMATİK

Teorem: e sayısı irrasyoneldir.

Kanıt: Aksini yani e sayısının rasyonel olduğunu varsayalım. Böylece $e = m/n$ olacak biçimde n ve m pozitif tamsayıları vardır. Şimdi n sayısın e'nin seri açılımını iki parçaya ayırmak için kullanacağız. Bunu şöyle yapacağız $e = L + R$ diyeceğiz ve L ile R'yi aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

$$L = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$R = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

Şimdi şuna dikkat edelim, $n!e = en\,(n-1)! = m(n-1)!$ bir tamsayı olmalıdır (çünkü m ve $(n-1)!$ birer tamsayıdır) ve $n!L$ sayısı da bir tamsayıdır (çünkü her $k \le n$ için $n!/k!$ bir tamsayıdır). Böylelikle $n!R = n!e - n!L$ sayısı da bir tamsayı olmalıdır çünkü iki tamsayının farkıdır. Ancak bu mümkün değildir, çünkü $n \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} n!\mathrm{R} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\ &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots = 0.71828\ldots \\ &< 1 \end{aligned}$$

Yani $n!R$ bir tamsayı olamaz, çünkü 1'den daha küçük bir pozitif tamsayı yoktur. Dolayısıyla e sayısının $e = m/n$ biçiminde yazılabileceği varsayımımız bir çelişkiye yol açar, yani e sayısı irrasyoneldir. □

Euler Özdeşliği

Muhteşem matematikçi Leonhard Euler, *e* sayısını ilk defa keşfeden, onu popülerleştiren ve bu temel sayıya bugün kullandığımız ismi veren kişidir. Ancak birçok matematik tarihçisi Euler'in *e* harfini kendi soyadının baş harfi olduğu için seçtiği iddiasına karşıdır. Yine de hala birçok kişi *e* sayısını Euler sayısı olarak adlandırmaktadır.

Hâlihazırda e^x, $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının seri açılımlarını tanıttık, önümüzdeki bölümde de bunların nereden geldiklerinden bahsedeceğiz. Ama hadi şimdi bunların hepsini bir arada görelim.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Bu formüller bütün *x* reel sayıları için geçerlidirler, ancak Euler gözü pek bir şekilde, *x* bir sanal sayı olduğunda bu formüllerin ne anlama geleceğini düşünme cesareti gösterdi. Bir sayının sanal bir kuvvetini almanın anlamı nedir? Varılan nokta Euler'in güzel teoremi oldu.

Teorem (Euler teoremi): Herhangi bir θ açısı için (radyan ölçüsünde),

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Teoremin kanıtını e^x fonksiyonunun serisinde $x = i\theta$ yazdığımızda ne olduğunu gözlemleyerek elde edeceğiz.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots$$

Şimdi *i* sayısının çeşitli kuvvetleri alındığında neler olduğuna dikkat edelim: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ (çünkü $i^3 = i^2 i = -i$), devamında

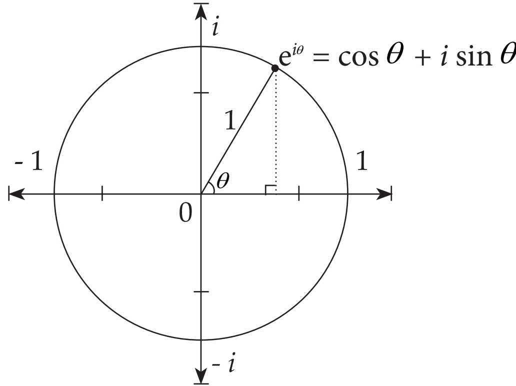
ise şöyle bir tekrarlı düzen ortaya çıkar: $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ ve böyle devam eder. Özel olarak, *i*'nin kuvvetlerinin bir reel bir sanal değer verdiğine dikkat edelim, ve böylece aşağıdaki işlemlerde gösterildiği üzere her iki terimde bir ortaya çıkan *i* sayısını ortak çarpan olarak dışarı alabiliriz,

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta \quad ☺
\end{aligned}
$$

Bu bize bölüm başında tanıttığımız "Tanrısal eşitliğin" kanıtını verir. Burada $\theta = \pi$ (veya 180°) alırsak,

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i(0) = -1$$

eşitliği elde edilir. Ancak Euler teoremi bundan çok daha fazlasını söyler. Hatırlarsanız $\cos\theta + i\sin\theta$ ifadesini daha önce de görmüştük. Karmaşık düzlemde, *x*-ekseninin pozitif tarafı ile θ açısı yapan, birim çember üzerindeki noktadır. Euler teoremi, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, bu noktayı basit bir şekilde ifade edebileceğinizi söyler.



Euler teoreminden, birim çember üzerindeki noktaların hepsi $e^{i\theta}$ formundadır

Ama bekleyin, fazlası var! Karmaşık düzlemdeki bütün noktalar, birim çember üzerindeki noktaların bir ölçeklendirilmiş versiyonlarıdır. Netleştirirsek, *z* karmaşık sayısının uzunluğu *R* ve açısı da ise, bu durumda bu

nokta, birim çember üzerindeki karşılık gelen noktanın sadece R katına eşittir. Diğer bir ifade ile,

$$z = Re^{i\theta}$$

olur. Böylece, eğer karmaşık düzlemde $z_1 = R_1e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = R_2e^{i\theta_2}$ gibi iki noktamız varsa, üs kuralı (karmaşık sayılar için),

$$z_1z_2 = R_1e^{i\theta_1}\, R_2e^{i\theta_2} = R_1R_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

olduğunu söyler, ki bu da uzunluğu R_1R_2 ve açısı $\theta_1 + \theta_2$ olan karmaşık sayıdır. Dolayısıyla bir kez daha ifade etmek gerekirse, karmaşık sayıları çarpmak için tüm yapmanız gereken, uzunluklarını çarpmak ve açılarını toplamaktır. Bu gerçeği bu bölümün baş kısımlarında kanıtladığımızda, sırtımızı yaklaşık bir sayfalık cebirsel ve trigonometrik özdeşliklere dayamıştık. Ancak Euler teoremi ile bu sonuca ulaşmamız sadece bir satır aldı, e sayısı sağ olsun, var olsun!

Hadi bu bölümü bu önemli sayıyı kutlamak için, Joyce Kilmer'in affına sığınarak, bir şiirle kapatalım.

Sanmam ki bir başka sayı görebileyim
Bu *e*'den daha güzel diyebileyim.
Harikulade ondalık kısımlarını ifade etmek bir bir,
Ki onlar 2.718281…
Ve *e*'de bitmez vasıflar.
O'nu herkes sever (en çok hocalar).
Müthiş güzel özellikleriyle
Bir sürü integral kolaylaşır *e* ile.
Teoremleri kanıtlar benim gibi bir saf bile.
e ancak varolabildi Euler'ın dehası ile.

ONBİRİNCİ BÖLÜM

$$y = x^{11} \Rightarrow y' = 11\,x^{10}$$

Kalkülüs Hesabının Sihri

Tanjant Kavramıyla Başlayalım

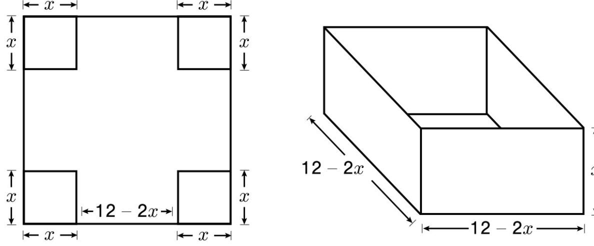
Matematik, bilimin kullandığı dildir ve doğanın kanunlarını açıklamak için kalkülüs hesabını kullanır. Kalkülüs hesabı kavramların nasıl büyüdüğünün ve değiştiğinin matematiğidir. Bu bölümde, fonksiyonların değişim hızlarını belirlemeyi ve karmaşık gözüken fonksiyonlara polinomlar gibi daha basit fonksiyonlarla yaklaşmayı öğreneceğiz. Kalkülüs hesabı optimizasyon için de güçlü bir araçtır ve bir niceliği maksimize etmek (örneğin, kâr ya da hacim) ya da minimize etmek (örneğin, masraflar ya da toplam seyahat mesafesi) için gereken değerleri belirlemek için de kullanılabilir.

Örneğin bir sonraki sayfadaki şekilde de gösterildiği gibi, elimizde bir kenarının uzunluğu 12 birim olan karton olduğunu düşünelim. Diyelim ki köşelerden x çarpı x büyüklüğünde kareler kesip kalan şekli de bir kutu biçiminde katlayalım. Bu oluşturduğumuz kutunun olabilecek en büyük hacmi nedir?

Öncelikle hacmi x değerinin bir fonksiyonu olarak hesaplayalım. Kutunun tabanının alanı (12 - 2x) (12 - 2x) ve yüksekliği de x olacaktır, yani kutunun hacmi

$$V = (12 - 2x)^2 x$$

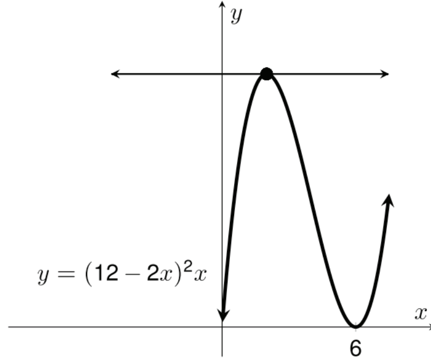
birim küp olur.



Hangi x değeri bu kutunun hacmini maksimize eder?

Amacımız x değerini bu hacmi olabildiğince büyük yapacak şekilde seçmek. Bu x değerini çok büyük ya da çok küçük seçemeyiz. Örneğin $x = 0$ ya da $x = 6$ olduğunda kutunun hacmi 0 olur. En uygun değer bunların arasında bir yerde olmalı.

Aşağıdaki grafik x'in 0 ila 6 arasındaki değerleri için $y = (12 - 2x)^2 x$ fonksiyonuna ait. $x = 1$ olduğu zaman, hacmi $y = 100$ olarak hesaplıyoruz. $x = 2$ olduğunda $y = 128$ oluyor ve $x = 3$ olduğunda $y = 108$ oluyor. $x = 2$ değeri uygun bir değermiş gibi görünüyor, ama belki de 1 ve 3 arasında daha da iyi bir sonuç veren bir sayı vardır?



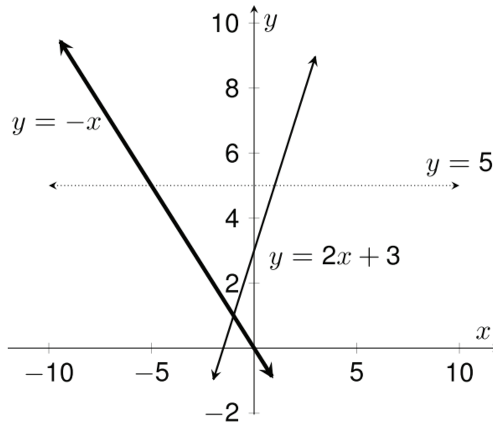
$y = (12 - 2x)^2 x$ değerini maksimize eden nokta yatay bir tanjanta sahiptir.

Maksimumun hemen sol tarafında fonksiyon pozitif bir eğimle yukarı doğru gidiyor ve hemen sağ tarafında da negatif bir eğimle aşağı doğru gidiyor. Yani maksimum noktasında fonksiyon ne artıyor ne de azalıyor, bu ikisi arasında gidip geliyor. Bunu daha matematiksel olarak ifade edersek; bu optimal noktada fonksiyon yatay bir tanjanta (eğimi 0 olan) sahip. Bu bölümde, kalkülüs hesabını kullanarak tanjant doğrusunun yatay olduğu 0 ile 6 arasındaki noktayı bulacağız.

Tanjant demişken, bu bölüm boyunca birçok tanjanttan bahsedeceğiz. Mesela az önce bahsettiğimiz problem köşeleri kesmenin optimal yöntemini bulmak içindi ve gerçekten de bölüm boyunca birçok köşe keseceğiz. Kalkülüs hesabı çok geniş bir konudur, tipik bir ders kitabı genelde bin sayfadan fazladır. Yirmi-otuz sayfada sadece en önemli noktalara değinebileceğiz. Bu kitapta karmaşık görünen objelerin alanını ve hacmini bulan *integral kalkülüs* hesabından bahsedemeyeceğiz, sadece fonksiyonların nasıl büyüdüğünü ve değiştiğini ölçen *diferansiyal kalkülüs* hesabından bahsedeceğiz.

Analiz etmesi en kolay fonksiyonlar doğrulardır. Bölüm 2'de $y = mx + b$ doğrusunun eğiminin m olduğunu görmüştük. Bu sebepten dolayı, eğer x değeri 1 artarsa y değeri m artar. Örneğin $y = 2x + 3$ doğrusunun eğimi 2 olur. Eğer x değerinin 1 arttırırsak (diyelim ki $x = 10$ değerinden $x = 11$ değerine artıyor), o zaman y değeri 2 artacaktır (bu durumda 23'den 25'e artar).

Aşağıdaki şekilde birkaç doğrunun grafiğini çizdik. Burada $y = - x$ doğrusunun eğimi - 1 ve yatay $y = 5$ doğrusunun eğimi de 0 olur.



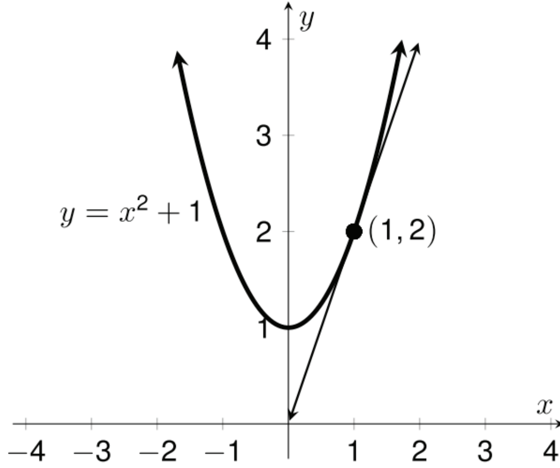
Doğruların grafikleri

Verilen iki nokta arasındaki doğruyu çizerek doğrunun formülüne ihtiyaç duymadan bu doğrunun eğimini belirleyebiliriz. Geçtiği noktalar (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olan doğrunun eğimi, "artış bölü akış" formülü ile bulunabilir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mesela $y = 2x + 3$ doğrusu üzerinde herhangi iki nokta alalım, diyelim ki (0, 3) ve (4, 11) noktaları. O zaman bu iki noktayı birleştiren doğrunun eğimi; $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = (11 - 3)/(4 - 0) = 8/4 = 2 olur, bu da tam olarak orijinal denklemde gördüğümüz doğrunun eğimidir.

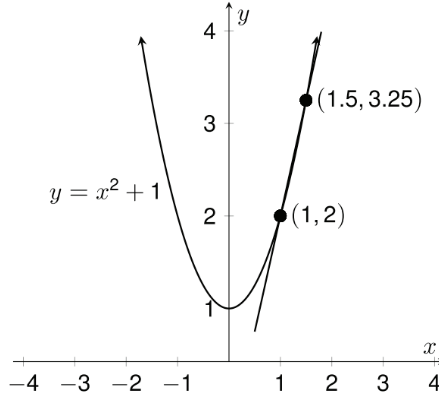
Şimdi, aşağıdaki grafikte de gösterilen $y = x^2 + 1$ fonksiyonunu düşünelim. Bu grafik düz bir çizgi değil ve eğimin sürekli değiştiğini görebiliyoruz. Bu grafiğin üzerindeki (1, 2) noktasından geçen tanjantın eğimini belirlemeye çalışalım.



$y = x^2 + 1$ için (1, 2) noktasından geçen tanjtant doğrusunun eğimini bulalım.

Kötü haber şu ki, bir eğimi belirlemek için iki nokta gerekiyor ve biz sadece (1, 2) noktasını biliyoruz. O zaman öncelikle eğri üzerindeki iki noktadan geçen doğrunun (buna sekant doğrusu denir) eğimini hesaplayarak tahmin yürütelim (aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi). Eğer $x = 1.5$ ise $y = (1.5)^2 + 1 = 3.25$ oluyor. O zaman (1, 2) ve (1.5, 3.25) noktalarından geçen doğrunun eğimine bakalım. Eğim formülümüze göre bu sekant doğrusunun eğimi şudur:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3.25 - 2}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$



Sekant doğrusuyla tanjant doğrusuna yakınlaşma

Daha iyi bir yaklaşım için ikinci noktayı (1, 2) noktasına daha yakın bir yere taşıyalım. Mesela $x = 1.1$ değeri için $y = (1.1)^2 + 1 = 2.21$ ve oluşan sekant doğrusu için eğim $m = (2.21 - 2)/(1.1 - 1) = 2.1$ oluyor. Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi, ikinci noktayı (1, 2) noktasına yakınlaştırdığımız zaman, sekant eğimi $x = 2$ değerine gittikçe daha da yaklaşmaktadır.

(x_1, y_1)	x_2	$y_2 = x_2^2 + 1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Eğim
(1, 2)	1.5	3.25	$\frac{3.25 - 2}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5}$	= 2.5
(1, 2)	1.1	2.21	$\frac{2.21 - 2}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1}$	= 2.1
(1, 2)	1.01	2.0201	$\frac{2.0201 - 2}{1.01 - 1} = \frac{0.0201}{0.01}$	= 2.01
(1, 2)	1.001	2.002001	$\frac{2.002001 - 2}{1.001 - 1} = \frac{0.002001}{0.001}$	= 2.001
(1, 2)	$1 + h$	$2 + 2h + h^2$	$\frac{(2 + 2h + h^2) - 2}{(1 + h) - 1} = \frac{2h + h^2}{h}$	$= 2 + h$

$x = 1 + h$ değerini aldığında ne olduğuna bir bakalım. Burada $h \neq 0$ ama bu nokta 1 noktasından bir saç teli kadar uzaklıkta bile olabilir. O zaman $y = (1 + h)^2 + 1 = 2 + 2h + h^2$ oluyor. O halde sekant doğrusunun eğimi şu olur:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(2 + 2h + h^2) - 2}{(1 + h) - 1} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

Şimdi, h değeri sıfıra yakınlaştıkça sekant eğimi de 2'ye yakınlaşıyor. Formal olarak şöyle deriz:

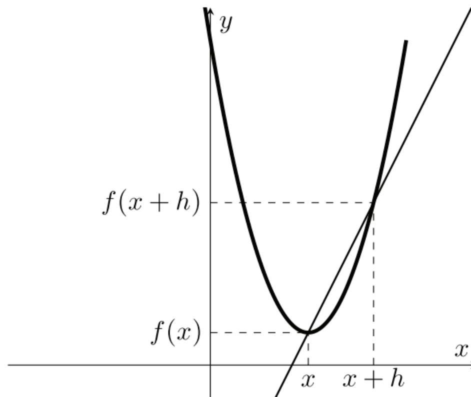
$$\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Bu notasyon şu anlama geliyor; h sıfıra giderken $2 + h$ değerinin limiti 2 olur. Sezgisel olarak, h değeri 0'a yakınlaştıkça, $2 + h$ değeri de 2'ye yakınlaşıyor. Yani $y = x^2 + 1$ fonksiyonunun grafiği için (1, 2) noktasındaki tanjant doğrusunun eğimi 2 olur.

Genel olarak durum şöyle oluyor: Verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $(x, f(x))$ noktasından geçen tanjant doğrusunun eğimini bulmak istiyoruz. Aşağıdaki şekildeki gibi $(x, f(x))$ noktası ile $(x + h, f(x + h))$ noktalarından geçen sekant doğrusunun eğimi;

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h - x)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olur.



(x, f(x)) ve (x + h, f(x + h)) noktalarından geçen sekant doğrusunun eğimi $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ olur.

(x, f(x)) noktasından geçen tanjantın eğimini ifade etmek için f'(x) notasyonunu kullanıyoruz. Yani:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bu tanım biraz karmaşık bir tanım, o yüzden şimdi birkaç örnek görelim. Formulü $y = mx + b$ şeklinde olan bir doğru için f(x) = $mx + b$ olur. $f(x + h)$ değerini hesaplamak için x değerini $x + h$ değeriyle değiştirerek şunu elde edelim: $f(x + h) = m(x + h) + b$. Dolayısıyla, sekant doğrusunun eğimi şöyle olur:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

Tanjant eğimi m değerine eşit oluyor, x değerinin ne olduğu fark etmeksizin $f'(x) = m$. Kulağa mantıklı geliyor, çünkü $y = mx + b$ doğrusunun eğimi her zaman m olur.

Şimdi tanımı kullanarak $y = x^2$ fonksiyonunun türevini bulalım. Şu şekilde:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

ve h sıfıra giderken, $f'(x) = 2x$ değerini elde ediyoruz.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu için:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2\end{aligned}$$

ve h sıfıra giderken $f'(x) = 3x^2$ değerini elde ediyoruz.

Verilen bir $y = f(x)$ fonksiyonu için türev olan $f'(x)$ fonksiyonunu belirleme sürecine diferansiyelleme (ya da türevleme) denir. İyi haber şu ki, bir kere birkaç basit fonksiyonun türevini bulduğumuz zaman daha karmaşık fonksiyonların türevlerini büyük bir zorlukla karşılaşmadan belirleyebiliriz ve bunu yukarıda verdiğimiz limite dayalı formel tanımı kullanmadan yapabiliriz. Bir sonraki teorem oldukça yararlıdır.

Teorem: Elimizde $u(x) = f(x) + g(x)$ fonksiyonu varsa, o zaman $u'(x) = f'(x) + g'(x)$ olur. Başka bir deyişle; toplamın türevi, türevlerin toplamıdır. Bir de, c sayısı bir sabit sayı olmak üzere, $cf(x)$ fonksiyonunun türevi $cf'(x)$ olur.

Bu teoremin bir sonucu olarak; $y = x^3$ fonksiyonunun türevi $3x^2$ olduğundan ve $y = x^2$ fonksiyonunun türevi $2x$ olduğundan, $y = x^3 + x^2$ fonksiyonunun türevi $3x^2 + 2x$ olacaktır. Teoremin ikinci önermesini örneklendirmek gerekirse; $y = 10x^3$ fonksiyonunun türevi $30x^2$ olur.

KOYU MATEMATİK

Kanıt: Diyelim ki *u(x) = f(x) + g(x)* olsun. O zaman

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Her tarafın da $h \to 0$ limitini almak bize şunu verir:

$$u'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Not etmekte fayda var ki, eşitliğin sağ tarafının limitini alırken şu gerçeği kullanıyoruz; *toplamın limiti, limitin toplamına eşittir*. Bunu şimdi ayrıntılı bir şekilde kanıtlamayacağız ama sezgisel olarak eğer *a* değeri *A* sayısına gittikçe daha çok yaklaşıyorsa ve *b* değeri de *B* sayısına gittikçe daha çok yaklaşıyorsa o zaman *a + b* değeri de *A + B* sayısına gittikçe daha çok yaklaşır. Ayrıca şunları da belirtelim ki; çarpımın limiti, limitlerin çarpımıdır ve bölümün limiti, limitlerin bölümüdür. Ancak ileride de göreceğimiz gibi, türev için benzer kurallar o kadar da basit değil. Örneğin; çarpımın türevi, türevlerin çarpımı değildir.

Teoremin ikinci kısmı için, $v(x) = cf(x)$ olsun, o zaman iddia ettiğimiz gibi:

$$v'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

eşitliklerini elde ederiz. □

$f(x) = x^4$ fonksiyonunu differansiyellemek için, önce $f(x + h) = (x + h)^4 = x^4 + 4x^3 h + 6x^2 h^2 + 4xh^3 + h^4$ olarak açalım. Bu ifadenin katsayıları 1, 4, 6, 4,1 size tanıdık gelebilir, bunlar Bölüm 4'de gördüğümüz Pascal üçgeninin dördüncü satırıdır. Dolayısıyla elimizde şu var:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = 4x^3 + h\, x \text{ [BİR ŞEYLER]}$$

ve tabii h değeri sıfıra giderken $f'(x) = 4x^3$ elde ederiz. Buradaki paterni görüyor musunuz? x, x^2, x^3 ve x^4 fonksiyonlarının türevleri sırasıyla 1, $2x$, $3x^2$ ve $4x^3$ fonksiyonları oluyor. Aynı mantığı daha yüksek kuvvetlere uygularsak bir sonraki teoremdeki kuvvetli kuralı elde ederiz. Türev için bir diğer popüler notasyon y' notasyonudur, şimdi o zaman bu notasyonu kullanalım:

Teorem (kuvvet kuralı): Her $n \neq 0$ doğal sayısı için,

$y = x^n$ fonksiyonunun türevi $y' = nx^{(n-1)}$ eşitliği ile verilir.

Örneğin, eğer $y = x^5$ fonksiyonu ise o zaman $y' = 5x^4$ olur

ve

eğer $y = x^{10}$ fonksiyonu ise o zaman $y' = 10x^9$ olur

Hatta bu kuralla $y = 1$ gibi sabit fonksiyonlarını bile türevleyebiliriz, $1 = x^0$ olduğundan $y = x^0$ fonksiyonunun türevi her x değeri için $0x^{-1} = 0$ olacaktır. Kulağa mantıklı geliyor çünkü $y = 1$ doğrusu yatay bir doğru. Kuvvet kuralı ve bir önceki teoremin bir sonucu olarak artık bütün polinomları türevleyebiliriz. Örneğin eğer

$$y = x^{10} + 3x^5 - x^3 - 7x + 2520$$

ise o zaman

$$y' = 10x^9 + 15x^4 - 3x^2 - 7$$

olur.

Kuvvet kuralı, n sayısı pozitif olmadığında bile doğrudur. Mesela eğer

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

ise o zaman

$$y' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^{-2}}$$

olur. Benzer bir şekilde eğer

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

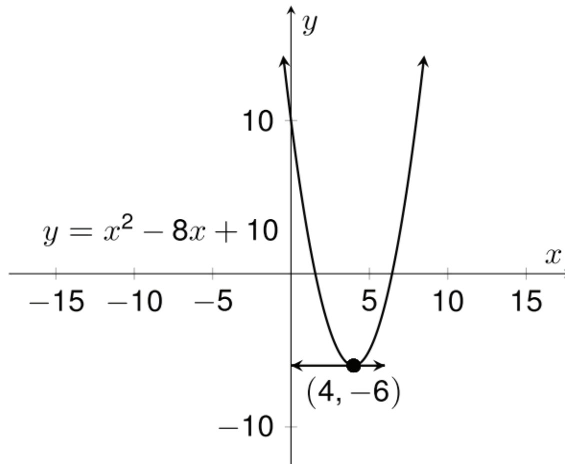
ise o zaman

$$y' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olacaktır. Ancak bu kuralları kanıtlamak için henüz hazır değiliz. Daha karmaşık fonksiyonları türevlemeyi öğrenmeden önce, şu ana kadar öğrendiklerimizi birtakım enteresan ve kullanışlı optimizasyon problemlerini çözmek için kullanalım.

Maksimum-Minimum Problemleri

Diferansiyalleme ile bir fonksiyonun hangi noktalarda maksimum ve minimum değerlerini aldığını belirleyebiliriz. Mesela hangi x değeri için $y = x^2 - 8x + 10$ parabolü en düşük noktasına ulaşır?



$y = x^2 - 8x + 10$ parabolü $y' = 0$ olduğunda en düşük değerini alır.

En düşük noktada tanjant doğrusunun eğimi 0 olmak zorundadır. Türevi $y'= 2x - 8$ olduğundan, $2x - 8 = 0$ eşitliğini çözdüğümüzde minimum

noktasının $x = 4$ (ve $y = 16 - 32 + 10 = -6$) noktasında gerçekleştiğini görüyoruz. Denklemi $y = f(x)$ olarak verilen bir fonksiyon için, $f'(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun bir *kritik noktası* denir. Yukarıdaki $y = x^2 - 8x + 10$ fonksiyonunun tek kritik noktası $x = 4$ noktasıdır.

Peki maksimum ne zaman gerçekleşir? Yukarıdaki fonksiyon için bir maksimum değeri yoktur çünkü $y = x^2 - 8x + 10$ değeri istenildiği kadar büyük seçilebilir. Ancak x değerini bir interval içine sınırlandırırsak, diyelim ki $0 \leq x \leq 6$, o zaman y değeri uç noktalarda en büyük olur. Burada $x = 0$ olduğunda $y = 10$ ve $x = 6$ olduğunda $y = -2$ olduğunu görüyoruz. Yani fonksiyon $x = 0$ uç noktasında maksimize olacaktır. Daha genel olarak, şöyle bir teoremimiz var:

Teorem (optimizasyon teoremi): Bir $y = f(x)$ türevlenebilir fonksiyonu x^* noktasında maksimum ya da minimum değerini alıyorsa o zaman x^*'a f fonksiyonunun kritik bir noktasıdır ya da bir uç noktadır.

Şimdi, bölümün başında verdiğimiz kutu problemine geri dönelim. Bu problemde

$$y = (12 - 2x)^2 x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

fonksiyonunu x değeri 0 ila 6 arasındayken maksimize etmeye çalışıyoruz. Öyle bir x değeri bulmak istiyoruz ki bu değer için y maksimum olsun. Fonksiyonumuz bir polinom olduğu için türevinin

$$y' = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12\,(x - 2)\,(x - 6)$$

olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla fonksiyonun $x = 2$ ve $x = 6$ olmak üzere iki tane kritik noktası vardır.

Uç noktalarda, yani $x = 0$ ve $x = 6$ noktalarında, kutunun hacminin 0 olduğunu biliyoruz, yani bu noktalarda kutunun hacmi minimize oluyor. Maksimum hacim diğer kritik nokta olan $x = 2$ noktasındadır ve bu durumda $y = 128$ birim küp olur.

Türevleme Kuralları

Ne kadar çok fonksiyonu türevleyebilirsek o kadar çok problem çözebiliriz. Kalkülüs hesabının belki de en önemli fonksiyonu $y = e^x$ denklemi ile verilen *üstel fonksiyon*dur. Bu fonksiyonu özel yapan şey, türevinin kendisine eşit olmasıdır.

Teorem: Eğer $y = e^x$ ise o zaman $y' = e^x$ olur.

KOYU MATEMATİK

Neden $f(x) = e^x$ fonksiyonu $f'(x) = e^x$ eşitliğini sağlıyor? Temel olarak fikir şöyle... Öncelikle şuna dikkat edelim:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

Şimdi e sayısının tanımını hatırlarsak:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

bu da n sayısının büyüdükçe $(1 + 1/n)^n$ değerinin e sayısına gittikçe yaklaştığı anlamına geliyor. Şimdi $h = 1/n$ olsun. Eğer n sayısı çok büyükse o zaman $h = 1/n$ değeri 0 sayısına çok yakındır. Yani h değeri 0'a çok yakın olduğunda,

$$e \approx (1+h)^{1/h}$$

Eğer her iki tarafın da h kuvvetini alıp $(a^b)^c = a^{bc}$ kuralını uygularsak;

$$e^h \approx 1 + h$$

olduğunu görürüz ve dolayısıyla

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$$

olur. Bu yüzden h değeri sıfıra yaklaştıkça, $\frac{e^h - 1}{h}$ değeri de 1'e yaklaşıyor, yani $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ değeri de e^x değerine yaklaşır. □

Peki kendi türevine eşit olan başka fonksiyonlar var mı? Evet ancak hepsi c bir reel sayı olmak üzere $y = ce^x$ formundadır. (Bunun $c = 0$ olduğu durumu da kapsadığını not edelim, o durumda $y = 0$ sabit fonksiyonunu elde ediyoruz.)

Daha önce gördük ki; fonksiyonları birbirlerine eklediğimizde, topla-

mın türevi türevlerin toplamına eşit oluyor. Peki ya fonksiyonların çarpımı? Ne yazık ki, çarpımın türevi türevlerin çarpımı değildir ama bir sonraki teoremde de gösterildiği üzere bunun hesaplanması çok da zor değildir:

Teorem (türev için çarpım kuralı): Eğer $y = f(x)g(x)$ ise o zaman:

$$y' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Örneğin çarpım kuralına göre, $y = x^3 e^x$ fonksiyonunu türevlemek için $f(x) = x^3$ ve $g(x) = e^x$ eşitliklerini verelim. O yüzden

$$y' = f(x)g'(x) + f'(x)\, g(x) = x^3 e^x + 3x^2 e^x$$

Şuna dikkat edelim ki $f(x) = x^3$ ve $g(x) = x^5$ olduğu zaman çarpım kuralı bu iki fonksiyonun çarpımı olan $x^3 x^5 = x^8$ fonksiyonunun türevi

$$y' = x^3 (5x^4) + 3x^2 (x^5) = 5x^7 + 3x^7 = 8x^7$$

oluyor bu da kuvvet kuralıyla tutarlıdır.

KOYU MATEMATİK

Kanıt (çarpım kuralı): Diyelim ki $u(x) = f(x)g(x)$. O zaman

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Bu kesrin payını, kurnazlık yapıp $f(x + h)\, g(x)$ değerini bir ekleyip bir çıkararak, 0 ile toplayalım:

$$\frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= f(x+h) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) + \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) g(x)$$

Bu toplam h sıfıra giderken, $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ olacaktır, tam da istediğimiz gibi. ☐

Çarpım kuralı sadece hesaplamalardaki kolaylığı ile değil aynı zamanda başka fonksiyonların türevini bulmamıza izin verdiği için de yararlıdır. Örneğin daha önce kuvvet kuralını pozitif kuvvetler için kanıtlamıştık ama şimdi bunu kesirli ya da negatif kuvvetler için de kanıtlayabiliriz.

Mesela kuvvet kuralının öngördüğü üzere; eğer

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

ise o zaman

$$y' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Bunun neden doğru olduğunu çarpım kuralını kullanarak görelim. Diyelim ki $u(x) = \sqrt{x}$. O zaman

$$u(x)u(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$$

Her iki tarafı da türevlersek, çarpım kuralı bize şunu veriyor:

$$u(x)\, u'(x) + u'(x)\, u(x) = 1$$

O yüzden $2u(x)u'(x) = 1$ olur ve dolayısıyla tahmin ettiğimiz gibi

$$u'(x) = \frac{1}{2u(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

KOYU MATEMATİK

Çarpım kuralı aynı zamanda negatif kuvvetler için de öngörüyor ki; $y = x^{-n}$ fonksiyonunun türevi

$$y' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

olmalı. Bunu kanıtlamak için, $n \geq 1$ olmak üzere $u(x) = x^{-n}$ olsun. O zaman tanıma göre $x \neq 0$ olmak üzere;

$$u(x)\, x^n = x^{-n}\, x^n = x^0 = 1$$

elde ediyoruz. Heri iki tarafı da türevlediğimiz zaman çarpım kuralı bize şunu veriyor:

$$u(x)\,(nx^{n-1}) + u'(x)\, x^n = 0$$

Her iki tarafı x^n değerine bölüp ilk terimi karşı tarafa attığımız zaman

$$u'(x) = -n\,\frac{u(x)}{x} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

elde ediyoruz, bu da istediğimiz eşitlik. □

Dolayısıyla eğer $y = 1/x = x^{-1}$ ise o zaman $y' = -1/x^2$.

Eğer $y = 1/x^2 = x^{-2}$ ise o zaman $y' = -2x^{-3} = -2/x^3$ ve bunun gibi...

Bölüm 7'de öyle bir pozitif sayısı bulmak istemiştik ki

$$y = x + 1/x$$

fonksiyonunu minimize etsin. Kurnaz bir geometri argümanıyla bunun $x = 1$ olduğu zaman gerçekleştiğini görmüştük. Ama kalkülüs hesabıyla o kadar zekice düşünmemize gerek yok. Basit bir şekilde $y' = 0$ eşitliğini çözersek, $1 - 1/x^2 = 0$ eşitliğini elde ederiz, bu eşitliği sağlayan tek pozitif sayı $x = 1$ sayısıdır.

Trigonometrik fonksiyonları da türevlemesi kolaydır. Bir sonraki teoremin doğru olması için, açı değerlerinin radyan cinsinden verilmesi gerektiğine dikkat edelim.

Teorem: Eğer $y = \sin x$ ise o zaman $y' = \cos x$. Eğer $y = \sin x$ ise o zaman $y' = -\cos x$ olur. Bir başka deyişle, *sinüs fonksiyonunun türevi kosinüs ve kosinüs fonksiyonunun türevi eksi sinüs fonksiyonudur.*

KOYU MATEMATİK

Kanıt: İspat bir sonraki lemmaya dayanmaktadır. (Bir lemma önemli bir teoremi kanıtlamaya yardımcı olan bir önermedir.)

Lemma:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Bu iddia diyor ki; h değeri 0'a yakın çok küçük bir açı olmak üzere (radyan cinsinden bir açı) bu sayının sinüs değeri h değerine çok yakın ve kosinüs değeri de 1'e çok yakın oluyor. Örneğin, bir hesap makinesi ile görebiliriz ki sin0.0123 = 0.0122996... ve cos0.0123 = 0.9999243... Lemmanın doğru olduğunu şimdilik varsayarsak, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevlerini bulabiliriz. Bunun için Bölüm 9'da gördüğümüz $\sin(A + B)$ formülünü kullanırsak,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$
$$= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

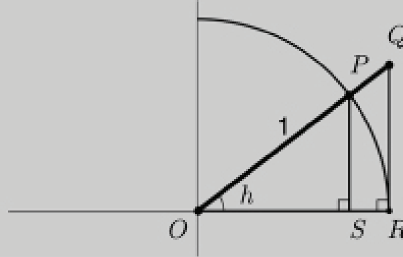
elde ediyoruz. Lemmaya göre h değeri sıfıra giderken, yukarıdaki ifade $(\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$ oluyor. Benzer bir şekilde,

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \sin x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

Ve h değeri sıfıra giderken, bu eşitlik $(\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x$ oluyor, bu da istediğimiz şey. □

KOYU MATEMATİK

Yukarıda lemma olarak verdiğimiz $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ iddiasını aşağıdaki şekli kullanarak kanıtlayabiliriz:



Yukardaki birim çemberin üzerinde R = (0, 1) ve P = (cos$h$, sin$h$) noktaları var. Buradaki h değeri pozitif küçük bir açı. Aynı zamanda OQR dik üçgeni için

$$\tan h = \frac{QR}{OR} = \frac{QR}{1} = QR$$

OPS dik üçgeninin alanının $\frac{1}{2}\cos h \sin h$ olduğunu görüyoruz ve OQR dik üçgeninin alanı

$$\frac{1}{2}OR\ QR = \frac{1}{2}\tan h = \frac{\sin h}{2\cos h}$$

Şimdi OPR çember dilimine odaklanalım. Birim çemberin alanı $\pi 1^2 = \pi$ ve OPS bölümü çemberin h/(2π) kesri kadarını oluşturuyor. Dolayısıyla OPR diliminin alanı $\pi\ (h/2\pi) = h/2$ olur.

OPR dilimi OPS üçgenini içeriyor ve aynı zamanda OQR üçgeninin de içinde kalıyor o zaman bunların alanlarını kıyasladığımızda şunu eşitsizlikleri elde ediyoruz:

$$\frac{1}{2}\cos h \sin h < \frac{h}{2} < \frac{\sin h}{2\cos h}$$

elde ederiz.

$a < b < c$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif sayılar için $1/c < 1/b < 1/a$ olur. Dolayısıyla:

$$\cos h < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$$

Şimdi h değeri sıfıra giderken, hem cos$h$ hem de 1/cos$h$ fonksiyonları istediğimiz gibi 1'e gider.

Yani:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$



KOYU MATEMATİK

Yukarıda bahsettiğimiz $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ eşitliğini de bir önceki sonucu ve biraz cebir bilgisi ($\cos^2 h + \sin^2 h = 1$ eşitliği gibi) kullanarak kanıtlayabiliriz.

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \frac{\cos^2 h - 1}{\mathrm{h}(\cos h + 1)}$$

$$= \frac{- \sin^2 h}{\mathrm{h}(\cos h + 1)} = - \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}$$

Şimdi h sayısı sıfıra giderken $\frac{\sin h}{h}$ değeri 1'e gider ve $\frac{\sin h}{\cos h + 1}$ değeri $\frac{0}{2} = 0$'a gider. Dolayısıyla:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$



Bir kere sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevlerini çıkardığımızda, tanjant fonksiyonunu da türevleyebiliriz.

Teorem: Eğer $y = \tan x$ ise o zaman $y' = 1/(\cos^2 x) = \sec^2 x$.

Kanıt: Diyelim ki $u(x) = \tan x = (\sin x)/(\cos x)$. O zaman,

$$\tan(x) \ \cos x = \sin x$$

Çarpım kuralını kullanarak her iki tarafı da türevlersek,

$$\tan x \ (-\sin x\ ) + \tan'(x) \ \cos x = \cos x$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi her iki tarafı cosx fonksiyonuna bölelim ve eşitliği $\tan'(x)$ için çözersek;

$$\tan'(x) = \ 1 + \tan x \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

burada sondan ikinci eşitlikte $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğini kullandığımıza dikkat edelim.

Benzer bir yaklaşımı türevleme için *bölüm kuralı*nı kanıtlamak için kullanabiliriz.

Teorem (bölüm kuralı): Eğer $u(x) = f(x)/g(x)$ ise o zaman

$$u'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)}$$

KOYU MATEMATİK

Bölüm kuralının kanıtı: $u(x)g(x) = f(x)$ eşitliğinden dolayı, her iki tarafı çarpım kuralına göre türevlediğimizde şunu elde ederiz:

$$u(x)\, g'(x) + u'(x)\, g(x) = f'(x)$$

Eşitliğin her iki tarafını da $g(x)$ ile çarparsak,

$$g(x)\, u(x)\, g'(x) + u'(x)\, g(x)\, g(x) = g(x)\, f'(x)$$

Şimdi $g(x)u(x)$ çarpımını $f(x)$ ile değiştirip ve eşitliği $u'(x)$ için çözersek dilediğimiz sonuca ulaşmış oluruz. □

Artık polinomları, üstel fonksiyonları, trigonometrik fonksiyonları ve daha fazlasını türevlemeyi biliyoruz. Fonksiyonlar toplandığında, çarpıldığında ve bölündüğünde nasıl türevlenmeleri gerektiklerini de biliyoruz. Zincir kuralı (aşağıda belirtilen ama kanıtlanmayan) fonksiyonların bileşkesi alındığında ne yapmamız gerektiğini ifade eder. Mesela eğer $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = x^3$ ise o zaman

$$f(g(x)) = sin(g(x)) = (sinx\ )^3$$

Dikkat edelim ki bu fonksiyon şununla aynı değil:

$$g(f(x)) = g(sinx) = (sinx\ )^3$$

Teorem (zincir kuralı): Eğer $y = f(g(x))$ ise o zaman $y' = f'(g(x))\, g'(x)$ olur.

Örneğin eğer $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = x^3$ ise o zaman $f'(x) = \cos x$ ve $g'(x) = 3x^2$ oluyor. Zincir kuralına göre, eğer $y = f(g(x)) = \sin(x^3)$ ise o zaman

$$y' = f'(g(x))\, g'(x) = cos(g(x))\, g'(x) = 3x^2\ \ cos(x^3)$$

Daha genel olarak, zincir kuralı diyor ki eğer $y = \sin(g(x))$ ise o zaman $y' = g'(x)\ \cos(g(x))$olur. Aynı mantıkla $y = \cos(g(x))$ fonksiyonu da $y' = -\, g'(x)$ $\sin(g(x))$ türevine sahiptir.

Öte yandan, $y = g(f(x)) = (\sin x)^3$ fonksiyonu için zincir kuralına göre

$$y' = g'(f(x))\, f'(x) = 3(f(x)^2\ )\, f'(x) = 3\ sin^2x\ \ cosx$$

Daha genel olarak, zincir kuralı diyor ki eğer $y = (g(x))^n$ ise o zaman $y' = n(g(x))^{n-1}\, g'(x)$ olur. Peki bu kural $y = (x^3)^5$ fonksiyonunu nasıl türevler?

$$y' = 5(x^3)^4\, (3x^2) = 5x^{12}\, (3x^2) = 15x^{14}$$

ki bu da kuvvet kuralı ile tutarlıdır.

Şimdi $y = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$ fonksiyonunu türevleyelim. O zaman:

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Üstel fonksiyonları da türevlemesi kolaydır. Daha önce bahsettiğimiz e^x fonksiyonunun türevi kendisi olduğundan eğer $y = e^{g(x)}$ ise o zaman

$$y' = g'(x)\, e^{g(x)}$$

Mesela $y = e^{x^3}$ fonksiyonunun türevi $y' = (3x^2)\, e^{x^3}$ olur.

$y = e^{kx}$ fonksiyonunun türevinin $y' = ke^{kx} = ky$ olduğuna dikkat edelim. Bu üstel fonksiyonları çok önemli yapan özelliklerden biridir. Bunlar bir fonksiyonun büyüme hızının fonksiyonun değerine orantısal olduğu zamanlar belirir. Üstel fonksiyonların finansta ve biyolojide sık olarak kullanılmasının sebebi budur.

Doğal logaritma fonksiyonu lnx, her $x > 0$ değeri için aşağıdaki özelliğe sahiptir

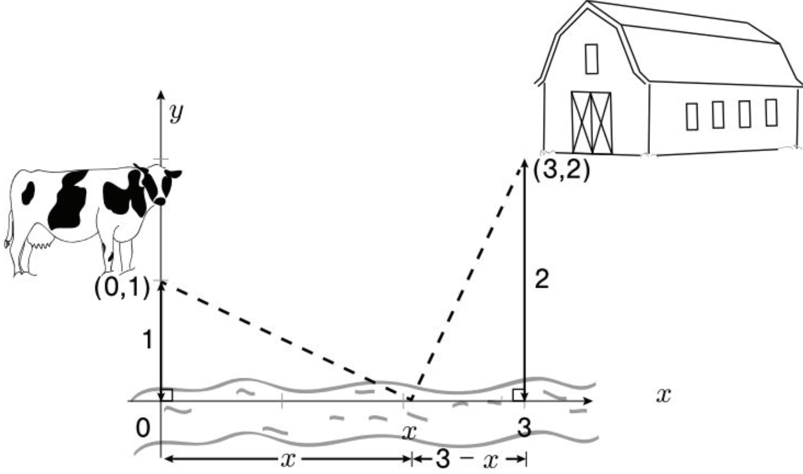
$$e^{lnx} = x.$$

Şimdi zincir kuralını kullanarak bunun türevini bulalım. Diyelim ki $u(x) = lnx$ o zaman $e^{u(x)} = x$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafını da türevlersek $u'(x)\, e^{u(x)} = 1$ elde ederiz. Ama $e^{u(x)} = x$ olduğundan $u'(x) = 1/x$ olduğunu görüyoruz. Başka bir deyişle eğer $y = lnx$ ise o zaman $y' = 1/x$ olur. Zincir kuralını tekrar uygularsak, $y = ln(g(x))$ olduğunda $y' = (g'(x))/g(x)$ olduğu sonucunu elde ederiz.

Zincir kuralının bütün bu sonuçlarını şu şekilde özetleyebiliriz:

$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x))g'(x)$
$y = \sin(g(x))$	$y' = g'(x)\cos(g(x))$
$y = \cos(g(x))$	$y' = -\,g'(x)\sin(g(x))$
$y = (g(x))^n$	$y' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
$y = e^{g(x)}$	$y' = g'(x)e^{g(x)}$
$y = ln(g(x))$	$y' = g'(x)/g(x)$

Şimdi o zaman zincir kuralını kullanarak biraz inek hesabı yapalım! İnek Clara, doğudan batıya doğru akan x-ekseni nehrinden 1 km uzaktadır. Ahırı ise şu anki pozisyonuna göre 3 km doğuda ve 1 km kuzeydedir. Önce nehirden biraz su içip sonra da ahırını gitmek istiyor ama toplam yürüme mesafesini minimumda tutmak şartı ile. Bunun için nehrin neresinde durup su içmesi gerekir?



İnek hesabı sorusu: İnek toplam yürüme mesafesini minimize etmek için hangi noktadan su içmelidir?

Clara'nın şu anki konumu olan (0, 1) noktasından suyu içme noktası olan (x, 0) noktasına düz bir çizgi üzerinde gideceğiniz varsayarsak o zaman Pisagor teoremi (ya da uzaklık formülü) bize diyor ki su içme noktasına olan doğrunun uzaklığı $\sqrt{(x^2+1)}$ ve oradan B = (3, 2) noktası olan ahıra olan uzaklık ise $\sqrt{((3-x)^2+4)} = \sqrt{(x^2-6x+13)}$. Dolayısıyla problem aşağıdaki değeri minimize eden x noktasını (0 ila 3 arasında) bulmaktır.

$$y = \sqrt{(x^2+1)} + \sqrt{(x^2-6x+13)} = (x^2+1)^{1/2} + (x^2-6x+13)^{1/2}$$

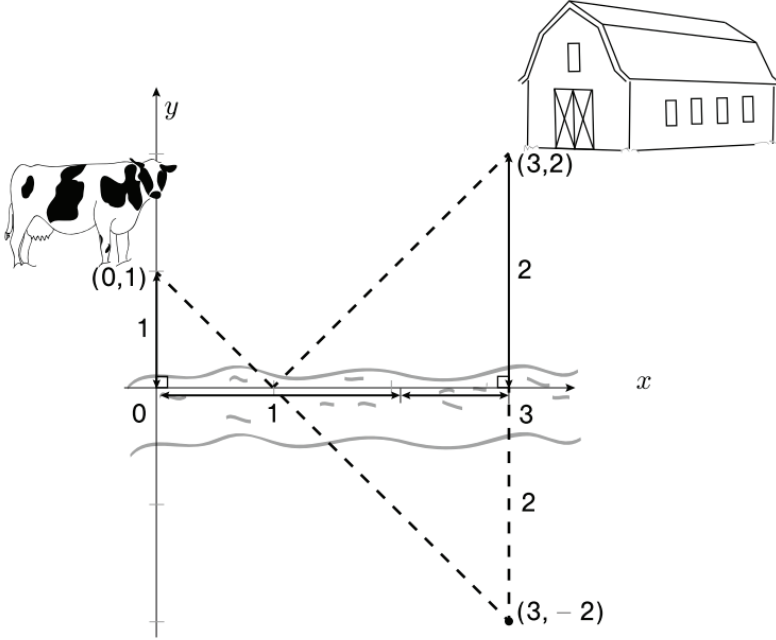
Bu ifadeyi türevleyip (zincir kuralını kullanarak) sıfıra eşitlediğimizde, şunu elde ediyoruz;

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+13}} = 0$$

Bu yukardaki eşitliğin $x = 1$ olduğunda $1/\sqrt{2} - 2/\sqrt{8}$ olduğunu kolaylıkla doğrulayabilirsiniz, ki bu da 0 yapar. (Eşitliği $x/\sqrt{(x^2+1)}$ ifadesini karşı tarafa atarak ve sonrasında her iki tarafın karesini alıp içler dışlar çarpımı yaparak doğrudan çözebilirsiniz. Birçok sadeleştirme gerçekleşir ve 0 ila 3 arasındaki tek çözüm de $x = 1$ olur.)

Bu cevabımızı Bölüm 7'deki gibi yapmış olduğumuz ufak bir yansıma ile teyit edebiliriz. Diyelim ki Clara su içtikten sonra (3, 2) noktasındaki ahıra değil $B' = (3, -2)$ noktasındaki ahırın simetrisine gidiyor, bir sonraki şekilde de gösterildiği gibi.

B' noktasına olan uzaklık B' noktasına olan uzaklıkla tam olarak aynıdır. Ve nehrin üstünden altına giden her yol x-eksinini bir noktada kesmek zorundadır. En kısa mesafeli yol (0, 1) noktasından (3, - 2) noktasına giden doğrudur (eğimi de -3/3 = - 1), ki bu yol da x-eksenini $x = 1$ noktasında keser. Bunun için kalkülüs hesabına ya da kareköklere gerek yok!



Simetri alarak problemi başka bir şekilde de çözebiliriz.

Sihirli Bir Uygulama: Taylor Serileri

Bir önceki bölümün son kısmında Euler denkleminin kanıtını aşağıdaki şu gizemli eşitliklere dayandırmıştık:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Bunları nasıl elde ettiğimizi belirtmeden önce, bu eşitliklerle biraz oynayalım. Yukarıdaki e^x değerini ifade eden serinin her terimini türevlediğimizde ne olduğuna bir bakalım. Örneğin kuvvet kuralı bize diyor ki, $x^{4/}4!$ teriminin türevi $4x^{3/}4! = x^3/3!$, bu da serinin bir önceki terimi. Başka bir deyişle, e^x fonksiyonunun serisini türevlediğimizde yine e^x serisini elde ediyoruz, bu da e^x ile ilgili bildiklerimizle örtüşüyor!

Eğer $x - x^{3/}3! + x^{5/}5! - x^{7/}7! + \cdots$ serisini terim terim türevlersek, $1 - x^{2/}2! + x^{4/}4! - x^6\, 6! + \cdots$ serisini elde ediyoruz, bu da sinüs fonksiyonunun türevinin kosinüs fonksiyonu olduğu gerçeği ile tutarlıdır. Benzer bir şekilde kosinüs serisini türevlediğimizde eksi sinüs fonksiyonunun serisini elde ederiz. Ayrıca şuna da dikkat edelim ki; bu seriler cos0 = 1 eşitliğini de onaylıyor ve her kuvvet çift olduğu için cos(- x)değerleri cos$x$ değerleri ile aynı olacaktır, yine bu da doğru olduğunu bildiğimiz bir şey (örneğin $(-x)^{4/}4! = x^{4/}4!$). Aynı şekilde, sinüs serisi için sin0 = 0 eşitliğini görüyoruz ve her kuvvet tek olduğu için sin(-x) = -sin$x$ oluyor, yine bilgilerimizle uyumlu.

Şimdi bu formüllerin nereden geldiğini görelim. Bu bölümde, en sık kullanılan fonksiyonların türevlerini bulmayı öğrendik. Ancak öyle zamanlar olur ki bir fonksiyonunun ikinci ya da üçüncü ya da daha yüksek dereceden türevlerini hesaplayarak birçok defa türevlemek gerekebilir. Bu türevler $f''(x)$, $f'''(x)$ vb. sembollerle gösterilir. İkinci türev olan $f''(x)$ fonksiyonu, o fonksiyonun bir $(x, f(x))$ noktasındaki eğiminin değişim hızını (bu aynı zamanda dışbükeylik olarak da bilinir) ölçer. Üçüncü türev de ikinci türevin değişim hızını ölçer ve aynı şekilde daha üst dereceden türevler için de bu böyle devam eder.

Yukarıda verilen formüllere *Taylor serileri* denir, bu konsept İngiliz matematikçi Brook Taylor (1685-1731) ardından isimlendirilmiştir. Türevleri $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ vb. olan bir $f(x)$ fonksiyonu ve her sıfıra "yeterince yakın" olan her x değeri için elimizde

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

eşitliği vardır. Peki buradaki "yeterince yakın" ne anlama geliyor? Bazı fonksiyonlar için, mesela e^x, sin$x$ ve cos$x$ fonksiyonları için, x sayısının her değeri sıfıra yeterince yakındır. Ancak ileride de göreceğimiz üzere bazı fonksiyonlar için x değeri bu serinin fonksiyonla örtüşmesi adına çok küçük bir değer olmalıdır.

Bu formülün $f(x) = e^x$ fonksiyonu için ne dediğine bir bakalım. e^x fonksiyonunun birinci türevi kendisi olduğu için (ve ikinci ve üçüncü de ve ...)

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = e^0 = 1$$

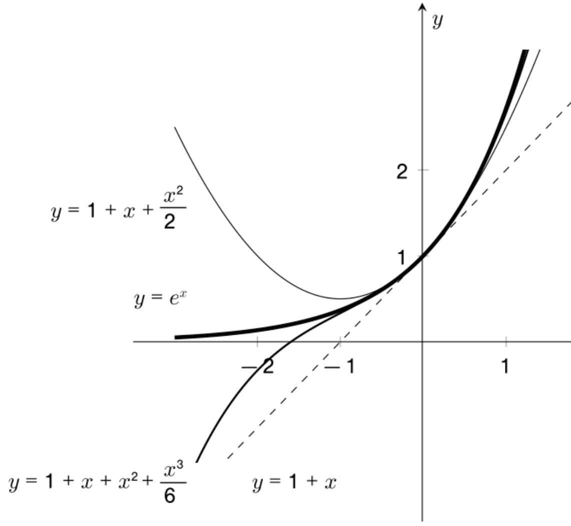
eşitliklerini elde ederiz, yani e^x fonksiyonu için Taylor serisi $1 + x + x^{2/}2! + x^{3/}3! + x^{4/}4! + \cdots$ şeklinde olur bahsedildiği gibi. Eğer x değeri küçükse o zaman, tam sonuca mükemmel bir şekilde yaklaşık bir değer elde etmek için bu serinin sadece ilk birkaç terimini hesaplamamız yeterlidir.

Şimdi bunu bileşik faize uygulayalım. Bir önceki bölümde gördük ki, 1000 birimlik paraya yüzde 5 sürekli bileşik faiz uygularsak yıl sonunda 1000 $e^{0.05}$ = 1051.27 birim para elde ederiz. *İkinci dereceden Taylor serisi* yardımıyla bunun için iyi bir yaklaşık tahminde bulunabiliriz:

$$1000\ (1 + 0.05 + (0.05)^{2/}2!) = 1051.25$$

ve üçüncü dereceden yaklaşım da bize 1051.27 birim para sonucu verecektir.

Taylor yaklaşımını aşağıdaki şekilde gösteriyoruz, burada $y = e^x$ fonksiyonu ilk üç Taylor polinomu ile çizilmiştir.



e^x fonksiyonu için Taylor yaklaşımı

Taylor polinomunun derecesini arttırdığımız sürece yaklaşım giderek daha da hatasız bir hale gelir, özellikle x'in sıfıra yakın değerleri için. Peki Taylor polinomlarının bu kadar iyi çalışmasının nedeni nedir? Birinci dereceden yaklaşım (aynı zamanda *lineer yaklaşım* olarak da bilinir) diyor ki, her sıfıra yakın x değeri için

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

Bu $(0, f(0))$ noktasından geçen bir doğrudur ve eğimi de $f'(0)$ olur. Benzer bir şekilde, n'inci dereceden Taylor polinomu $(0, f(0))$ noktasından geçer ve orijinal fonksiyon olan $f(x)$ ile aynı birinci, ikinci, üçüncü ve vb. n'inci dereceden türeve sahiptir.

KOYU MATEMATİK

Taylor polinomları ve Taylor serisi x'in 0 dışında başka sayılara yakın değerleri için de tanımlanabilir. Daha özel olarak, $f(x)$ fonksiyonun a temel-noktası için Taylor serisi

$$f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

ifadesine eşittir. Buradaki a sayısının sıfır olduğu durumda olduğu gibi, Taylor serisi a sayısına yeterince yakın olan her x değeri için $f(x)$ fonksiyonuna eşittir.

Şimdi $f(x)$ = sin$x$ fonksiyonu için Taylor serisine bir göz atalım. Dikkat edelim ki $f'(x)$ = cos$x$, $f''(x)$ = - sin$x$, $f'''(x)$ = -cos$x$ ve tekrar $f''''(x)$ = sin$x$ = $f(x)$. Bunlar, $f(0)$ noktasından başlayarak, 0 noktasında değerlendirildiği zaman döngüsel bir patern olan 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1,... dizisini elde ediyoruz ve bu da Taylor serisinde her çift kuvvetin yok olmasına neden oluyor. Yani x'in (radyan cinsinden hesaplanan) her değeri için,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

ve benzer bir şekilde eğer $f(x)$ = cos$x$ ise şunu elde ediyoruz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Son olarak da Taylor serisinin x'in bazı değerleri için fonksiyona eşit olup bazı değerleri için fonksiyona eşit olmadığı bir örneğe bakalım. $f(x) = \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1}$ örneğini düşünelim. Burada $f(0) = 1$ olur ve zincir kuralını kullanarak ilk birkaç türevi hesaplayalım:

$$f'(x) = -1(1 - x)^{-2}(-1) = (1 - x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(1 - x)^{-3}(-1) = 2(1 - x)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(1 - x)^{-4}(-1) = 3!(1 - x)^{-4}$$

$$f''''(x) = -4!(1 - x)^{-5}(-1) = 4!(1 - x)^{-5}$$

Bu paterni devam ettirdiğimiz zaman (ya da tümevarımla kanıtlayarak), ($(1 - x)^{-1}$) fonksiyonunun n'inci türevinin $n!(1 - x)^{-(n+1)}$ olduğunu görüyoruz ve $x = 0$ olduğu zaman n'inci türev sadece $n!$. Sonuçta Taylor serisinin bize verdiği eşitlik

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Bir sonraki bölümde bu toplam hakkında daha çok konuşacağız. O arada sonsuz sayıyı toplamanın tam olarak ne demek olduğunu merak edebilirsiniz. Böyle bir toplam nasıl olur da bir şeylere eşit olabilir? Bu oldukça makul bir soru ve bunu sonsuzluğun tabiatını incelerken cevaplamaya çalışacağız ve bu arada birçok merak uyandırıcı, şaşırtıcı, güzel ve sezgisel olmayan olgularla karşılacağız.

ONİKİNCİ BÖLÜM

$1 + 2 + 3 + \cdots = \infty$

(belki de -1/12?)

Sonsuzluğun Sihri

Sonsuz ilginç

Son olarak, diğerlerinden daha az önemli olmayan sonsuzluk hakkında konuşalım. Birinci bölümde maceramız 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamı

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = 5050$$

ile başladı ve sonunda 1'den n'ye kadar sayıların toplamları için formüller bulduk:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ayrıca başka sonlu toplamlar için de formüller bulduk. Bu bölümde,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

şeklindeki sonsuz terimi olan toplamlar için formüller bulacağız.

Umarım bu toplamın sonucunun 2 olduğuna sizi ikna edebilirim. Hem de yaklaşık olarak değil, *tam* olarak 2. Buna benzer bazı toplamların sonucu aşağıdaki gibi şaşırtıcı olabilir:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

veya

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

gibi bazı toplamlar sonlu olmayabilir. Bütün pozitif sayıların toplamına *sonsuz* adını verelim, ve

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$

olarak gösterelim. Bunun anlamı bu toplamın sürekli olarak büyüdüğü ve her değeri aştığıdır: Bir süre sonra yüzü geçecek, sonra bir milyonu geçecek, daha sonra bir katrilyonu geçecek ve bu şekilde büyümeye devam edecek. Ama bu bölümün sonunda bir şekilde bu toplamın (-1)/12 olabileceğini göreceğiz. Yani

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \frac{-1}{12}$$

ifadesinin doğru olabileceğini göreceğiz.

İlginizi çekti mi? Umarım çekmiştir! Gördüğünüz gibi sonsuzluğun belirsizliğine daldığınızda tuhaf şeyler olabilir. Bu durum matematiği ilginç ve eğlenceli kılan unsurlar arasındadır.

Sonsuz, bir sayı mıdır? Pek değil, ama bazen sayıymış gibi muamele gördüğü olur. Kabaca tarif etmek gerekirse matematikçiler

$$\infty + 1 = \infty \qquad \infty + \infty = \infty \qquad 5 \times \infty = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

gibi ifadeler kullanabilir. Herhangi bir sayının her zaman bir fazlası olduğundan, en büyük sayı yoktur. ∞ sembolü "herhangi bir sayıdan büyük" anlamında kullanılır. Benzer biçimde $-\infty$ sembolü "herhangi bir negatif sayıdan küçük" anlamına gelir. Yeri gelmişken $\infty - \infty$ ve $1/0$ ifadeleri tanımsızdır. $1/n$ sayısı, n sayısı küçüldükçe (pozitif kalmak şartı ile) büyüyeceği için $1/0$ ifadesini ∞ olarak tanımlamak cezbedicidir. Ancak, *1* sayısını sıfıra yaklaşan negatif değerlere bölersek her seferinde daha küçük negatif sayılar elde ederiz, ki bu problem yaratır.

Önemli bir sonsuz toplam: Geometrik seri

İstisnasız bütün matematikçiler için doğal olan ama matematikçi olmayanlara tuhaf gelebilecek bir ifade ile başlayalım

$$0.99999\ldots = 1$$

Herkes bu iki sayının birbirine yakın, hem de çok yakın olduğunda hemfikirdir ama bazıları yine de farklı sayılar olduklarını düşünebilir. Farklı kanıtlar sunarak bu sayıların aynı olduğuna sizi ikna etmeye çalışayım. Umarım bu açıklamalardan biri tatmin edici olur.

Sanırım en hızlı yöntem

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul etmekten geçer. Bu durumda eşitliğin iki tarafını da 3 ile çarparsak

$$1 = \frac{3}{3} = 0.99999\ldots$$

ifadesine ulaşırız.

Başka bir kanıt, 6. Bölüm'de kullandığımız devreden ondalıklar kullanılarak yapılabilir. Sonsuz devirli ondalığı ω olarak gösterelim. Yani

$$\omega = 0.99999\ldots$$

İki tarafı da 10 ile çarparsak

$$10\omega = 9.99999\ldots$$

olur. İlk denklemi ikinciden çıkarırsak

$$9\omega = 9.00000\ldots$$

buluruz. Yani

$$\omega = 1$$

dir.

Hiç cebir kullanmayan bir argüman sunayım. Eğer iki sayı birbirlerinden farklı ise ikisi arasında bir başka sayı olması gerektiğine (mesela ortalamaları) katılır mısınız? O zaman, varsayalım ki 0.999… ve 1 farklı sayılar. Bu durumda aralarında olması gereken sayı nedir? Bu sayı yoksa, birbirlerinden farklı olamazlar.

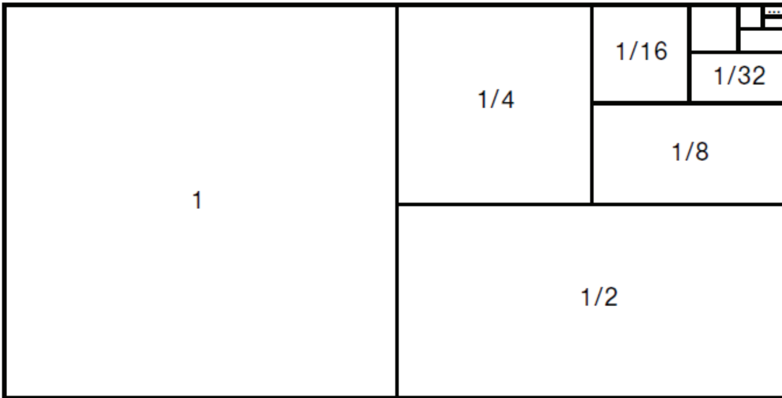
Eğer iki sayı, veya iki sonsuz toplam birbirlerine *istenildiği kadar* yakın ise bu sayılar veya toplamlar *eşittir* diyelim. Bir başka deyişle, bu iki ifade arasındaki fark herhangi bir pozitif sayıdan, mesela 0.01 veya 0.0000001'den- daha küçükse bu iki ifade birbirlerine eşittir diyelim.

Bu mantıkla

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

eşitliğini kanıtlayabiliriz. Bu toplama fiziksel bir anlam verebiliriz. Diyelim bir duvardan 2 metre uzaklıkta duruyorsunuz ve duvara doğru tam 1 metrelik dev bir adım attınız, bir sonraki seferde yarım metrelik bir adım attınız, ondan da sonra çeyrek metrelik bir adım ve bu şekilde devam ettiniz. Her adımda aldığınız mesafe bir öncekinin yarısına düştü. Sürekli daha ufak adımlar atmanın fiziksel zorluklarını bir kenara bırakırsak, en sonunda duvara ulaşabilirsiniz. Dolayısıyla toplamda aldığınız mesafe 2 metredir.

Bu toplamı geometrik bir biçimde de aşağıdaki şekildeki gibi ifade edebiliriz. 1 x 2'lik bir dikdörtgen ile başlayalım. Alanı 2 birim. Ortasından bölelim, tekrar ikiye bölelim, sonra tekrar, daha sonra bir daha, bu şekilde devam edelim. İlk elde ettiğimiz alan 1 birim. Bir sonraki 1/2 birim, daha sonraki 1/4 ve bu şekilde devam ediyor. *n* sonsuza giderken, elde ettiğimiz bu yeni bölgeler bütün dörtgeni kaplayacak. Yani toplam alanları 2 birim.



$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots = 2$ eşitliğinin geometrik kanıtı

Daha cebirsel bir açıklama için aşağıdaki tablodaki gibi *kısmi toplamlar*a bakalım:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ için kısmi toplamlar				
1	=	1	=	$2 - 1$
$1 + \frac{1}{2}$	=	$1\frac{1}{2}$	=	$2 - \frac{1}{2}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	=	$1\frac{3}{4}$	=	$2 - \frac{1}{4}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	=	$1\frac{7}{8}$	=	$2 - \frac{1}{8}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	=	$1\frac{15}{16}$	=	$2 - \frac{1}{16}$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	=	$1\frac{31}{32}$	=	$2 - \frac{1}{32}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Bu düzen, $n \geq 0$ tam sayıları için

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

eşitliğine işaret ediyor gibi. Bu eşitliği tümevarım ile kanıtlayabiliriz (6. Bölüm'de öğrenmiştik) veya sonlu geometrik seri formülünü de kullanabiliriz.

Teorem (Sonlu geometrik seri): x birden farklı bir sayı ve $n \geq 0$ bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Kanıt 1: n üzerine tümevarım. Eğer $n = 0$ ise formüle göre

$$1 = \frac{1 - x^1}{1 - x}$$

olur. Bu eşitlik bariz olarak doğru. Şimdi varsayalım ki $n = k$ için formül doğru, yani

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

eşitliği sağlansın.

Formül $n = k + 1$ için de doğru, çünkü eşitliğin iki tarafına x^{k+1} eklersek

$$\begin{aligned}1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + x^{k+1} &= \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1} \\ &= \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + \frac{x^{k+1}(1 - x)}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşabiliriz. □

Alternatif olarak *kaydırma* yaparak da kanıtlayabiliriz.

Kanıt 2: Bu toplamı

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

şeklinde yazalım. İki tarafı da x ile çarparak

$$xS = x + x^2 + x^4 + \cdots + x^n + x^{n+1}$$

eşitliğine ulaşabiliriz. İki taraftan da xS ifadesini çıkarırsak

$$S - xS = 1 - x^{n+1}$$

ifadesini elde ederiz. Bir başka deyişle $S\,(1 - x) = 1 - x^{n+1}$. Dolayısıyla

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

olur. □

Eğer $x = 1/2$ ise, sonlu geometrik seri daha önce gözlemlediğimiz düzeni doğruluyor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

n büyüdükçe $(1/2)^n$ değeri 0'a yaklaşıyor. Yani n sonsuza giderken

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2$$

eşitliği bulunur.

KOYU MATEMATİK

Sadece matematikçilere komik gelen bir fıkra. Sonsuz sayıda matematikçi bir bara girer. Birinci matematikçi bir bardak bira ister. İkincisi yarım bardak bira ister. Üçüncüsü çeyrek bardak bira ister. Dördüncü matematikçi 1/8 bardak bira ister... Barmen kızıp, bağırır: limitinizi bilin! Ve onlara 2 bardak bira verir.

Genel olarak -1 ve 1 arasındaki hangi sayının kuvvetini alırsak alalım daha büyük kuvvetler 0'a daha yakın sayılar olur. Bu şekilde, çok önemli olan *geometrik (sonsuz) seriye* ulaşırız.

Teorem 2 (geometrik seri): $-1 < x < 1$ bir x sayısı için

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$x = 1/2$ alırsak geometrik seri son probleme bir çözüm sunuyor.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2$$

Geometrik seri size tanıdık geldiyse, bu bir önceki bölümün sonunda kalkülüs kullanarak $y=\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun Taylor serisinin

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

olduğunu gösterdiğimizden kaynaklanıyor olabilir.

Geometrik serinin bize daha başka neler ifade ettiğine bakalım. Bu toplam için ne diyebilirsiniz?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$$

1/4 parantezine alırsak

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

$x = 1/4$ için geometrik seriye göre

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-1/4}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

Bu serinin, hiç bir kelimeye gerek duymayan çok güzel bir ispatı biraz aşağıda. Koyu karelerin büyük karenin alanının tam olarak 1/3'ünü kapladığına dikkat edin.

Sonsuz ondalık kısım aslında gizlenmiş bir sonsuz seri olduğundan, geometrik seriyi kullanarak 0.9999… ile ilgili soruyu da çözebiliriz. Tam olarak $x = 1/10$ için geometrik seriyi kullanırsak

$$0.99999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right)$$

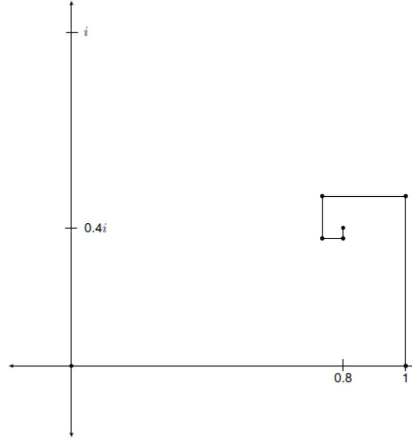
$$= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) = \frac{9}{10 - 1} = 1$$

1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + ⋯ = 1/3 eşitliğinin sözsüz kanıtı

Geometrik seri formülü, uzunluğu 1'den küçük bir x karmaşık sayısı için de geçerlidir. Mesela, $i/2$ karmaşık sayısının uzuluğu 1/2'dir, böylece geometrik seri bize

$$1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^3+\left(\frac{i}{2}\right)^4+\cdots=\frac{1}{1-i/2}$$
$$=\frac{2}{2-i}=\frac{2}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{4+2i}{4-i^2}=\frac{4+2i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$$

olduğunu söyler, bunu karmaşık düzlemde şöyle gösterebiliriz.



$$1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^3+\left(\frac{i}{2}\right)^4+\cdots=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$$

Sonlu geometrik seri formülü 1 haricindeki bütün x değerleri için geçerli olduğu halde sonsuz geometrik seri formülünün geçerli olabilmesi için $|x|< 1$ koşulunun sağlanması gerekir. Mesela, eğer $x = 2$ ise, sonlu geometrik seri (6. Bölüm'de gösterdiğimiz üzere) doğru olarak

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^n=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$$

sonucunu verir. Eğer sonsuz geometrik seride $x = 2$ olursa, formüle göre

$$1+2+4+8+16+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

gibi saçma bir sonuca ulaşırız. (Fakat bu saçma görünüm aldatıcı olabilir. Bu saçma sonucun makul bir açıklamasını yapacağız.)

KOYU MATEMATİK

Sonsuz tane pozitif sayı vardır

1, 2, 3, 4, 5,...

Sonsuz tane de çift sayı vardır:

2, 4, 6, 8, 10,...

Matematikçiler pozitif tamsayılar kümesi ile pozitif çift tamsayılar kümesinin elemanları *aynı çokluktadır* der (veya kardinalitesi ya da sonsuzluk derecesi), çünkü bu kümelerin elemanları eşlenebilir:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

Pozitif sayılar ile eşlenebilen kümelere *sayılabilir* denir. Sayılabilir kümeler en küçük sonsuzluk derecesine sahiptir. Elemanları listelenebilir her küme sayılabilirdir, çünkü birinci elemanı 1 ile, ikinci elemanı 2 ile eşleşebilir ve bu şekilde bütün elemanları pozitif sayılar ile eşleşebilir. Tam sayılar kümesi

...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...

en küçük elemanından başlayarak sıralanamaz (listedeki ilk sayı hangisi olabilir ki?) ama yine de şu şekilde sıralanabilir:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3,...

Tam sayılar kümesi sayılabilirdir ve eleman sayısı pozitif sayılar kümesinin eleman sayısına eşittir.

Peki ya pozitif rasyonel sayılar kümesi? Bu sayılar, pozitif *n* ve *m* tamsayıları için m/n şeklinde olan sayılardır. İnansanız da inanmasanız da bu küme de sayılabilirdir. Bu sayılar pay ve paydalarının toplamlarına göre şu şekilde sıralanabilir:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Her pozitif rasyonel sayı bu listede belireceği için bu küme de sayılabilirdir.

KOYU MATEMATİK

Sonsuz olup da sayılamaz olan sayı kümeleri de var mıdır? Alman matematikçi Georg Cantor (1845 – 1918), reel sayılar kümesinin, hatta 0 ile 1 arasındaki reel sayılar kümesinin de, *sayılamaz* olduğunu kanıtlamıştır. Bu sayıları şu şekilde sıralamayı deneyebilirsiniz:

0.1, 0.2, …, 0.9, 0.01, 0.02, …, 0.99, 0.001, 0.002, …, 0.999, …

Fakat bu sıralama sadece sonlu sayıda ondalık basamağı olan reel sayıları içerecektir. Mesela, 1/3 = 0.333… sayısı bu sıralamada hiçbir zaman belirmeyecektir. Peki, bu sayıları daha farklı bir şekilde sıralamanın bir yolu var mıdır? Cantor, aşağıdakı akıl yürütme ile, böyle bir sıralamanın olamayacağını kanıtlamıştır. Diyelim ki ilk birkaç reel sayıyı şu şekilde sıraladık:

0.314159265...

0.271828459...

0.618033988...

0.123581321...

⋮

Bu listedekilerden farklı yeni bir reel sayı yaratarak bu listenin eksik kalmaya mahkûm olduğunu kanıtlayabiliriz. Tam olarak $0.r_1r_2r_3r_4$… şeklinde ve r_1 sayısı 0 ile 9 arasında ama listedeki ilk sayının birinci ondalık basamağından farklı, yani 3'ten farklı, r_2 sayısı 0 ile 9 arasında ama listedeki ikinci sayının ikinci ondalık basamağından farklı, yani 7'den farklı ve diğer basamaklar için de aynı kurala uyan bir sayı bulalım. Mesela 0.2674… sayısı. Böyle bir sayı bu listede olamaz. Böyle bir sayı neden bu listedeki milyonuncu sayı değildir? Çünkü milyonuncu ondalık basamağı farklıdır. Dolayısıyla yapacağınız herhangi bir sıralama eksik kalmaya mahkûmdur. Haliyle, reel sayılar kümesi sayılamaz bir kümedir. Bu yönteme Cantor diagonal yöntemi denir, (üzgünüm) ama ben Cantor örneği ile kanıt demeyi seviyorum.

Aslında, sonsuz tane rasyonel sayı olsa da, çok daha fazla irrasyonel sayı olduğunu da gösterdik. Eğer reel sayı doğrusundan rastgele bir sayı seçecek olursanız, neredeyse kesin olarak irrasyonel olacaktır.

Sonsuz serilere olasılık problemlerinde sıkça rastlanır. Diyelim ki 6 yüzlü iki tane zarı, toplamları 6 veya 7 gelene kadar attınız. Eğer toplam 7'den önce 6 ederse oyunu siz kazanıyorsunuz, önce 7 olursa kaybediyor-

sunuz. Bu oyunu kazanma şansınız nedir? 6 x 6 = 36 tane aynı olasılıklı sonuç var. Bunlardan 5 tanesinde toplam 6'ya eşit

((1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1))

ve 6 tanesinde toplam 7'ye eşit

((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1))

Öyle görünüyor ki kazanma ihtimaliniz %50'den az. Sezgisel olarak zarları attığınızda sadece 5 + 6 = 11 tane durum sizi ilgilendiriyor, geri kalan her durumda yeniden zar atmak lazım. Bu 11 durumdan 5 tanesinde kazanıyorsunuz, 6 tanesinde kaybediyorsunuz demektir. Yani, kazanma ihtimaliniz 5/11 gibi görünüyor.

Geometrik seri kullanarak kazanma ihtimalinizin gerçekten 5/11 olduğunu kanıtlayabiliriz. İlk atışta kazanma olasılığı 5/36. İkinci atışta kazanma olasılığı nedir? Bunun olabilmesi için ilk atışta toplamların 6 veya 7 olmaması, ikinci atışta da toplamın 6 olması gerekli. İlk atışın 6 veya 7 olma olasılığı 5/36 + 6/36 = 11/36, yani 6 veya 7 olmama olasılığı 25/36. İkinci atışta kazanma olasılığını hesaplamak için bu sayıyı herhangi bir atışta toplamın 6 etmesinin olasılığı ile çarpmamız gerek, yani bu olasılık (25/36)(5/36). Üçüncü atışta kazanmak için ilk iki atışta toplamların 6 veya 7 olmaması gerekir ve üçüncü atışta da toplamın 6 olması gerekir. Bu durumun olasılığı (25/36)(25/36)(5/36)'dır. Dördüncü atışta kazanma olasılığı $(25/36)^3(5/36)$ olarak hesaplanabilir. Diğer olasılıklar da benzer şekilde hesaplanabilir. Bütün bu olasılıkları toplarsak bu oyunu kazanma olasılığı, tahmin ettiğiniz üzere

$$\frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^2\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^3\left(\frac{5}{36}\right) + \cdots$$

$$= \frac{5}{36}\left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \left(\frac{25}{36}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{5}{36}\left(\frac{1}{1 - \frac{25}{36}}\right) = \frac{5}{36 - 25} = \frac{5}{11}$$

olarak bulunur. □

Harmonik Seri ve Benzerleri

Sonsuz bir serinin toplamı (sonlu) bir sayı olduğunda, seri *yakınsak* denir. Sonsuz bir seri yakınsak olmadığı zaman bu seriye *ıraksak* denir. Eğer sonsuz bir seri yakınsak ise, serinin terimlerinin gittikçe 0'a yaklaşması gerekir. Örneğin, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ serisinin 2'ye yakınsadığını gördük, ve terimlerinin 0'a yakınsadığını fark ettik.

Fakat bu önermenin tersi doğru değildir. Terimleri 0'a yaklaştığı halde bir serinin ıraksak olması mümkündür. En önemli örneği *harmonik seriler*dir. Bu ismi almasının sebebi, antik Yunan'da uzunlukları $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ sayılarının katları olan tellerin birbirleri ile uyumlu sesler ürettiklerinin fark edilmesidir.

Teorem: Harmonik seri ıraksaktır. Yani $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$.

Kanıt: Bu toplamın sonsuz olduğunu göstermek için, sürekli büyüdüğünü göstermeliyiz. Bunu yapmak için bu toplamı terimlerinin paydalarındaki sayıların basamak sayılarına göre parçalara ayıracağız. İlk 9 terimin hepsinin 1/10'dan büyük olduğuna dikkatinizi çekerim. Yani,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}>\frac{9}{10}$$

Sıradaki 90 terimin hepsi de 1/100'den büyük, dolayısıyla

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{99}>90\times\frac{1}{100}=\frac{9}{10}$$

Benzer biçimde, daha sonraki 900 terimin hepsi de 1/1000'den büyük. Bu yüzden

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{999}>\frac{900}{1000}=\frac{9}{10}$$

olur.

Devam edersek,

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{9999}>\frac{9000}{10000}=\frac{9}{10}$$

olduğunu görebiliriz. Demek ki bütün sayıların toplamı

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots$$

ifadesinden büyüktür. Bu ifade sürekli büyüdüğünden serimiz de sürekli olarak büyür. ☺

KOYU MATEMATİK

İlginç bir nokta: γ = 0.5772155649... (Euler-Mascheroni sabiti) ve $\ln(n)$, n sayısının 10. Bölüm'de tanımlanan logaritması ise

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\gamma+\ln n$$

(γ'nın -"gamma" olarak okunur- rasyonel olup olmadığı bilinmemektedir.) n büyüdükçe yukarıdaki yaklaşık değer daha iyi sonuç vermektedir. Aşağıda toplamı ve verdiği yaklaşık değerleri gösteren bir tabloyu bulabilirsiniz

n	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$	$\gamma+\ln n$	Hata
10	2.92897	2.87980	0.04917
100	5.18738	5.18239	0.00499
1000	7.48547	7.48497	0.00050
10000	9.78761	9.78756	0.00005

En az bu kadar ilginç bir başka nokta, eğer sadece paydası asal olan terimleri toplarsak, büyük p asalları için

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{p}\approx M+\ln\ln p$$

dır. Burada M = 0.2614972 sayısı Mertens sabitidir ve p büyüdükçe yukarıdaki yaklaşık değer daha iyi sonuç verir.

Bunun bir sonucu olarak

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots=\infty$$

Fakat, büyük p asalları için bile log(log p) çok küçük olduğu için bu toplam ancak sonsuza emekleyerek gidiyor. Mesela, bir googol (yani 10^{100}) sayısından küçük asalların terslerinin toplamı hala 6'dan küçüktür.

Harmonik seride uyarlamalar yaptığımızda ne olduğuna bakalım. Sonlu sayıda terimi toplamdan çıkarırsak seri yine ıraksak kalıyor. Örneğin ilk bir milyon terimin toplamı 14'ten biraz büyük, geriye kalan toplam yine sonsuza gidiyor.

Harmonik serinin terimlerini büyütürsek seri yine ıraksak. Mesela $n > 1$ olduğunda $1/\sqrt{n} > 1/n$ ve dolayısıyla

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots=\infty$$

olur. Fakat her terimi *küçültmek* serinin yakınsak olacağı anlamına gelmez. Örneğin her terimi 100'e bölsek harmonik seri yine ıraksak olur

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\cdots=\frac{1}{100}\,(1+1/\,2+1/3+1/4+\cdots)=\infty$$

Elbette seriyi yakınsak hale getirecek değişiklikler yapmak da mümkün. Mesela her terimin karesini alırsak seri yakınsak olur. Euler'in kanıtladığı üzere

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Aslında (integral kullanarak) $p > 1$ sayıları için

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$$

toplamının $\frac{p}{p-1}$'den küçük bir sayıya yakınsak olduğunu kanıtlayabiliriz. Mesela $p = 1.01$ olduğunda, terimler harmonik serinin terimlerinden çok az küçük olmalarına rağmen elde ettiğimiz seri yakınsaktır.

$$1+\frac{1}{2^{1.01}}+\frac{1}{3^{1.01}}+\frac{1}{4^{1.01}}+\cdots<101$$

Diyelim ki harmonik seriden içinde 9 bulunan bütün terimleri çıkardık. Bu durumda yakınsak bir seri elde edeceğimizi gösterebiliriz. Bunu, 9-suz sayıları, paydalarının basamak sayılarına göre sayarak yapacağız. Paydası tek basamaklı olan 8 sayı ile başlayalım: $\frac{1}{1}$, ..., $\frac{1}{8}$. Paydası iki basamaklı ve 9 içermeyen, (ilk basamak için 8 ve ikinci basamak için 9 tercih olduğundan) $8 \times 9 = 72$ tane sayı var. Benzer şekilde, paydası üç basamaklı ve 9 içermeyen $8 \times 9 \times 9$ tane sayı var. Genel olarak paydası n basamaklı ve 9 içermeyen $8 \times 9^{n-1}$ sayı var. Tek basamaklılar arasında en büyük sayının 1, iki basamaklılar arasında 1/10, üç basamaklılar arasında 1/100 olduğunu göz önüne alarak sonsuz serimizi şu şekilde parçalara ayırabiliriz

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<8$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{88}<(8\times 9)\times\frac{1}{10}=8\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{888}<(8\times 9^2)\times\frac{1}{100}=8\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

Bu şekilde parçalara ayırmaya devam edelim. Geometrik seriden dolayı, bütün terimlerin toplamı en fazla

$$8\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots\right)=\frac{8}{1-\frac{9}{10}}=80$$

olabilir. Demek ki 9-suz seri yakınsak.

Bu serinin yakınsaklığını düşünmenin yollarından biri, neredeyse bütün büyük sayıların basamaklarında bir yerde 9 vardır. Gerçekten de, eğer basamakları 0 - 9 arasından rastgele seçilmiş rastgele bir sayı üretirseniz 9'un ilk n basamakta belirmeme olasılığı $(9/10)^n$. Bu sayı n büyüdükçe 0'a yaklaşır.

KOYU MATEMATİK

Eğer e ve π sayılarının basamaklarını rastgele sayı dizileri olarak düşünürsek neredeyse kesin olarak en sevdiğiniz sayı bu basamaklarda mutlaka belirecektir. Mesela, benim en sevdiğim 2520 sayısı π'nin 1845 ve 1848'inci basamakları arasında beliriyor. İlk 6 Fibonacci sayısı 1, 1, 2, 3, 5, 8; 820390'ıncı basamağın başında belirmeye başlıyor. Rastgele üretilmiş bir sayının basamaklarının önceden belirlenmiş 6 basamakla örtüşme olasılığı bir milyonda bir olduğundan bu durumu ilk bir milyon basamakta gözlemlememiz çok da şaşırtıcı değil. Yani bir milyon kadar 6 basamak arasında bu sayının yeri pek de fena değil. Diğer taraftan 999999 sayısının π sayısında oldukça erken, 763'üncü basamakta belirmesi ise şaşırtıcı. Fizikçi Richard Feynman, eğer π sayısını sadece 767'inci basamağa kadar ezberlerse, en sonunda "999999 olarak devam ediyor" diyerek insanları pi sayısının rasyonel olduğuna inandırabileceğini söylemiştir.

En sevdiğiniz sayıyı e ve π sayılarının basamakları arasında bulan programlar ve web siteleri vardır. Bunlardan birini kullanarak π sayısını 3000'inci basamağa kadar ezberlersem 31961 ile biteceğini farkettim. 19 Mart 1961, işe bakın ki benim doğum günüm.

İlginç ve İmkânsız Sonsuz Toplamlar

Şimdiye kadar gördüğümüz sonsuz toplamları *toparlayalım*. Bu bölüme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$$

serisini inceleyerek başladık. Bu serinin geometrik seriye bir örnek olduğunu gördük. Geometrik seri, $-1 < x < 1$ olduğunda

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

Geometrik serinin 0 ve -1 arasındaki negatif sayılarda da geçerli olduğuna dikkatinizi çekerim. Örneğin, $x = -1/2$ iken

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots=\frac{1}{1-(-1/2)}=\frac{2}{3}$$

Terimleri 0'a yaklaşırken pozitif ve negatif olarak değişen serilere *değişimli seri* denir. Değişimli seriler her zaman yakınsaktır. Yukarıdaki değişimli seri üzerinden gidersek, reel sayı doğrusunu çizin ve parmağınızı 0'a koyun. Sonra sağa doğru 1'e kaydırın, ondan sonra sonra sola 1/2'ye kaydırın, bir adım sonra sağa 1/4 birim kaydırın (bu noktada parmağınız 3 /4 sayısı üzerinde olmalı). Sonra sola 1/8 birim kaydırın (yani parmağınız şimdi 5/8 üzerinde) ve böyle devam edin. Parmağınız en "sonunda" bir sayıya ulaşmalı. Bu örnekte 2/3.

Şimdi şu değişimli diziye bakalım

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

İlk dört terimden sonra biliyoruz ki bu toplam en az $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0.583...$ ve ilk beş terimden sonra en fazla $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0.783...$ Sonsuz toplamın gerçek değeri bu iki sayının orta noktasından biraz büyük, 0.693147… Kalkülüs kullanarak bu sayının *gerçek* değerini bulabiliriz.

Isınma egzersizi olarak şu geometrik seriye bakalım:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

ve iki tarafın da türevini alınca ne olacağına bakalım. 11. Bölüm'den hatırlayalım, 1, x, x^2, x^3, x^4 vs. terimlerinin türevleri 0, 1, $2x$, $3x^2$, $4x^3$ vs. Yani bu sonsuz toplamın türevinin terimlerinin türevlerinin toplamında

oluşan sonsuz seri olduğunu kabul edersek, zincir kuralına göre $-1< x < 1$ olduğunda

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Şimdi geometrik seriye, x yerine $-x$ koyarak bakalım, yani $-1 < x < 1$.

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x}$$

Şimdi her iki tarafın da *ters türev*ini alalım (bu kavram kalkülüs alan öğrenciler tarafında *integral* olarak bilinir). İntegral almak için geriye gideceğiz. Mesela, x^2'nin türevi $2x$ olduğundan, $2x$'in integrali x^2 olacak (Kalkülüs öğrencileri için teknik bir not: $x^2 + 5$ veya $x^2 + \pi$, veya herhangi bir c sayısı için $x^2 + c$'nin türevi $2x$'tir, yani aslında $2x$'in integrali $x^2 + c$ olmalı). 1, x, x^2, x^3, x^4'ün integralleri sırasıyla $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5}$ ve geri kalanların integralleri de benzer şekilde bulunabilir. Sağ tarafta, $\frac{1}{1+x}$'in integrali de $\ln(1 + x)$. Bu durumda, $-1 < x < 1$ olduğunda

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = ln\,(1 + x)$$

(Kalkülüs öğrencileri için teknik not: $x = 0$ olduğunda sol tarafın ln(1)'e, yani 0'a eşit olmasını istediğimiz için sol taraftaki sabit terim 0 olmalı). x değeri 0'a yaklaştıkça 0.693147… sayısının doğal anlamını keşfediyoruz:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = ln\,2$$

KOYU MATEMATİK

Eğer, x yerine $- x^2$ koyarak bir geometrik seri yazarsak, $-1 < x < 1$ olduğunda

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \cdots = \frac{1}{1 + x^2}$$

eşitliğini elde ederiz. Pek çok kalkülüs kitabında $y = \tan^{-1}(x)$'in türevinin $y' = \frac{1}{1+x^2}$ olduğu yazar. Yani iki tarafın da integralini alırsak ($\tan^{-1}(0) = 0$ olduğunu da dikkate alarak),

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \tan^{-1} x$$

eşitliğini elde ederiz. x'i 1'e yaklaştırdıkça

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

eşitliğine ulaşırız.

Geometrik serilerin nasıl kullanıldığını gördük, şimdi de nasıl kötüye kullanıldıklarına bakalım. Geometrik seri formülüne göre $-1 < x < 1$ olduğunda

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

Şimdi $x = -1$ olduğunda ne olduğuna bakalım. Formüle göre

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

Elbette bu mümkün değil, çünkü sadece tam sayılarla toplama çıkartma yapıyoruz, toplamın yakınsak olduğunu varsaysak bile sonucun ½ gibi bir rasyonel sayı olması mümkün değil. Diğer taraftan bu formül çok da saçma değil. Eğer kısmi toplamlara bakarsak

$$1 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 + 1 = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

şeklinde gittiğini görürüz. Kısmi toplamların yarısı 1 diğer yarısı da 0 olduğundan "toplamın" ½ olması çok da saçma sayılmaz.

Eğer geçersiz bir değer olan $x = 2$'yi kullanırsak, geometrik seri formülüne göre

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = \frac{1}{(1 - 2)} = -1$$

Bu toplam bir öncekinden daha da saçma görünüyor. Pozitif sayıların toplamı nasıl negatif olabilir? Fakat bu toplam için de belki makul bir açıklama vardır. Mesela, 3. Bölüm'de pozitif sayıların bazen negatif sayılar gibi davranabildiklerini gördük, mesela modüler aritmetikte $10 \equiv -1 \pmod{11}$ denkliği $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ gibi ifadeler yazmamıza olanak veriyor.

İşte $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ serisini anlamanın alışılmışın dışında düşünmeyi gerektiren bir yolu: 4. Bölüm'de herhangi pozitif tam sayının 2'nin kuvvetleri cinsinden tek bir biçimde yazılabileceğini görmüştük. Bu gözlem *ikilik tabanda* aritmetiğin temelidir, bilgisayarlar bu sistemle hesap yapar. Her tam sayı 2'nin sonlu sayıda kuvvetini kullanır. Fakat şimdi

sonsuz tamsayılara da izin verelim, yani 2'nin istediğimiz kadar kuvvetini kullanabiliriz. Tipik bir sonsuz sayı şöyle olabilir

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64 + 256 + 2048 + \cdots$$

Bu "sayıların" ne oldukları pek açık değil ancak onlarla aritmetik yapmak için tutarlı kurallar oluşturabiliriz. Mesela, eldeleri doğal olarak taşıyarak bu sayılarla toplama yapabiliriz. Örneğin 106 sayısını yukarıdaki "sayıya" eklersek, 2 + 2 = 4, sonra 8 + 8 = 16, ve 16 ile sonraki 16 toplandığında 32 edeceğinden, benzer şekilde 32 + 32 = 64 olduğundan ve 64 + 64 = 128 olduğundan

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & +2 & & +8 & +16 & & +64 & & +256 & +\cdots \\
 & +2 & & +8 & & +32 & +64 & & & \\
\hline
1 & & +4 & & & & +64 & +128 & +256 & +\cdots
\end{array}$$

"sayısını" elde ederiz. 256'dan itibaren serideki hiçbir sayı değişmez. Şimdi "en büyük" sonsuz tam sayıya 1 eklediğimizde ne olacağını düşünelim.

$$\begin{array}{l}
\;\;1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \cdots \\
+1 \\
\hline
\end{array}$$

Sonuç hiç durmaksızın eldeleri sürekli taşıdığımız bir zincirleme reaksiyon sonucunda 2'nin hiçbir kuvvetinin belirmemesi. Dolayısıyla bu toplamın sonucu 0 olarak düşünülebilir. Yani $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots) + 1 = 0$. Bu yüzden, iki taraftan da 1 çıkarttığımızda elde edeceğimiz toplam -1 gibi davranıyor diye düşünebiliriz.

Bu da benim en sevdiğim sonsuz toplam:

$$1+2+3+4+5+\cdots=\frac{-1}{12}$$

Bu eşitliği, sonlu geometrik serinin ikinci kanıtında kullandığımız *kaydırma yöntemi* ile "kanıtlayabiliriz". Kaydırma yöntemi sonlu toplamlar için geçerli olsa da sonsuz toplamlarda saçma sapan görünen sonuçlar verebilir. Mesela, ilk olarak kaydırma yöntemini daha önce kanıtladığımız bir eşitlikte kullanalım.

Aynı toplamı iki defa yazacağız, ama ikinci toplamın terimlerini bir pozisyon kaydıracağız, aşağıdaki gibi:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Bu eşitlikleri alt alta toplayınca 2S = 1 elde ederiz. Bu yüzden geometrik seride için daha önce belirttiğimiz gibi, $S = \frac{1}{2}$.

KOYU MATEMATİK

Kaydırma yöntemini kullanarak geometrik seri formülünün hızlı ama geçerli olmayan bir kanıtını verebiliriz.

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

$$xS = \quad x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Bu denklemleri birbirinden çıkartırsak $S(1-x)=1$ elde ederiz. Bu yüzden

$$S = \frac{1}{(1 - x)}$$

olur. 

Şimdi serimizin terimleri işaret değiştirdiğinde de ilginç bir sonucu olduğunu iddia ediyoruz, 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + 7 – 8 +··· = ¼.

İşte kaydırmalı bir kanıt. Toplamı iki defa yazarsak

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots$$
$$T = \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots$$

Bu denklemleri toplarsak 2*T* = *S* = ½ ve dolayısıyla *T* = ¼.

Sonunda bütün pozitif tam sayıların toplamını *U* olarak gösterelim ve altına da *T* toplamını yazdığımızda ne olduğuna bakalım

$$U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \cdots$$

$$T = \; 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots$$

İkinci toplamı ilkinden çıkartırsak *U* – *T* = 4 + 8 + 12 + 16 +··· = 4 (1 + 2 + 3 + 4 +···) elde ederiz.

Bir başka deyişle *U* – *T* = 4*U*

U için çözersek, 3*U* = - *T* = - 1/4. Bu sebeple *U* = - 1/12.

Tekrar belirtelim, sonsuz tane pozitif sayıyı topladığınızda toplam sonsuza ıraksar. Fakat bütün bu yaptıklarımızı sihir deyip bir kenara atmadan önce, bulduğumuz sonlu cevapların anlamlı olabileceğini düşünelim. Sayılara bakış açımızı biraz genişleterek 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ··· = -1 eşitliğinin makul olabileceğini gördük. Sayıları reel sayı doğrusuna yerleştirdiğimiz-

de karesi -1 olan bir sayı bulmanın da imkânsız olduğunu ama sayıları düzlemde karmaşık sayılar olarak gördüğümüzde, kendi tutarlı aritmetik kuralları ile bunun mümkün olduğunu gördüğümüzü hatırlayalım. Aslında sicim (string) kuramı üzerine çalışan teorik fizikçiler 1 + 2 + 3 + 4 + ··· = - 1 / 12 eşitliğini hesaplamalarında kullanırlar. Bunun gibi çelişkili toplamlar ile karşılaştığınızda imkânsız deyip bir kenara bırakabilirsiniz, ama hayal gücünüze biraz güvenirseniz bu hesapların geçerli olabileceği tutarlı sistemler kurabilirsiniz.

Bu kitabı bir başka çelişkili sonuç ile bitirelim. Bu bölümün başında değişmeli seriden bahsetmiştik:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

Bu seri ln(2) = 0.693147… sayısına yakınsıyor. Bu sayıları farklı bir sırada toplarsanız, doğal olarak yine aynı sonuca ulaşmayı bekleyebilirsiniz, çünkü toplama işlemi değişmelidir yani herhangi *A* ve *B* sayıları için *A* + *B* = *B* + *A*. Yine de, bu toplamı aşağıdaki gibi yeniden yazınca ne olacağına bakalım.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\cdots$$

Aynı sayıların toplandığına dikkatinizi çekerim, paydası tek olan sayıları toplarken paydası çift olanları çıkartıyoruz. Çift sayıları tek sayıların iki katı hızda çıkartmamıza rağmen elimizde ikisinden de sonsuz miktarda var ve orijinal toplamda kullandığımız her rasyonel sayı yeni toplamda da beliriyor. Değil mi? Fakat bu toplamın aşağıdaki ifadeye eşit olduğuna dikkatiniz çekerim

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\quad+\frac{1}{6}\quad-\frac{1}{8}\quad+\frac{1}{10}\quad-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

Bu orijinal toplamın sonucunun yarısı! Bu nasıl olabilir? Aynı sayıları sadece sırasını değiştirerek tamamen farklı bir sonuç bulmak nasıl mümkün olabilir? Şaşırtıcı cevap toplamanın değişme özelliğinin sonsuz sayıda sayıyı toplarken *geçerli olmaması*.

Bu problem, pozitif terimleri ve negatif terimleri ıraksak seriler oluşturan yakınsak serilerde meydana çıkar. Bir başka deyişle pozitif terimler +∞'a negatif terimler de -∞'a gidiyor. Son örneğimizdeki durum da bu. Bu serilere şartlı yakınsak seriler denir, şaşırtıcı biçimde bu serileri istediğiniz herhangi bir sonucu verecek şekilde yeniden düzenleyebilirsiniz. Sonucu 42 olacak şekilde son toplamı nasıl yeniden düzenleyebiliriz? Pozitif terimleri, sonuç 42'den biraz fazla olacak şekilde toplayalım, sonra ilk negatif terimi çıkaralım. Ondan sonra kalan pozitif terimlerden sonlu tanesini sonucu 42'yi biraz geçecek şekilde toplayalım ve ikinci negatif terimi çıkartalım. Bu şekilde devam edersek sonuç gittikçe 42'ye yaklaşacak (Örneğin, beşinci negatif terim olan -1/10'u çıkarttığımızda sonuç ile 42 arasındaki fark 0.1 civarında olacak. Ellinci negatif terim olan -1/100 çıkarttığımızda ise 42 ile arasındaki fark 0.01 civarında olacak ve bu şekilde azalmaya devam edecek).

Genel olarak karşılaştığımız sonsuz serilerin pek çoğunun bu çeşit garip bir özelliği yoktur. Eğer her terimini mutlak değeri ile değiştirerek (yani negatif terimleri pozitif yaparsak) elde ettiğimiz dizi yakınsak ise orijinal seriye mutlak yakınsak denir. Mesela daha önce gördüğümüz

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \frac{2}{3}$$

serisi, terimlerini mutlak değerleri ile değiştirdiğimizde yakınsak olduğundan mutlak yakınsaktır.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Mutlak yakınsak serilerde toplama işleminin değişme özelliği geçerlidir, sonsuz terimle işlem yaparken bile. Dolayısıyla yukarıdaki değişmeli serinin terimleri 1, - 1/2, 1/4, - 1/8, 'in yerlerini nasıl değiştirirsek değiştirelim seri her zaman 2/3'e yakınsar.

Sonsuz serilerin aksine kitapların bir sonu olur. Sonsuzun ötesine gitmeye kalkmayacağız, bu yüzden burası durmak için iyi bir nokta fakat son bir matematiksel gezintiye karşı koyamayacağım.

Sihirli Kareler, Yeniden Karşınızda

Kitabın sonuna ulaşmanızın ödülü olarak bir başka sihirli matematiksel konuyu beğenilerinize sunuyorum. Sonsuzluk ile hiç alakası yok, ama adında karesel olarak "sihir" geçiyor: *Sihirli kareler.* Sihirli kare her sütun, satır ve çaprazlarında bulunan sayıların toplamının eşit olduğu, sayılardan oluşan bir karedir. 3 x 3'lük en bilinen sihirli kare aşağıda, her üç sütun ve satırın ve iki çaprazın toplamları 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

3x3'lük 15 sihirli toplamlı sihirli kare

İşte bu sihirli kare hakkında az bilinen, benim kare-palindrom özelliği dediğim bir özellik. Eğer her sütun ve satırı 3'er basamaklı sayılar olarak düşünürsek ve bu sayıların karelerini toplarsak

$$492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2$$

$$438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Benzer bir özellik bazı çaprazlarda da meydana çıkar. Mesela

$$456^2 + 312^2 + 897^2 = 654^2 + 213^2 + 798^2$$

Gerçekten de *sihirli kareler*!

En basit 4 × 4'lük sihirli kareler bütün toplamları 34 edecek şekilde 1 ve 16 arasındaki rakamlardan oluşur, aşağıdaki gibi. Matematikçiler ve sihirbazlar 4 × 4'lük sihirli kareleri severler çünkü sihirli toplama ulaşmanın pek çok yolu vardır. Mesela, aşağıdaki karede her sütun, satır ve çaprazın toplamı 34 ediyor, dahası 2 × 2'lik her altkarenin toplamı da 34. Örneğin sol üstteki karedeki sayılar (8, 11, 13, 2) veya ortadaki dört sayı ve dört köşedeki dört sayı.

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

Toplam 34 olan bir sihirli kare. Her satır, sütun ve çaprazın toplamı 34, ve hatta neredeyse tüm diğer simetrik yerleşmiş olan karelerin de.

İki basamaklı, 20'den büyük en sevdiğiniz bir sayı var mı? Bir sonraki sayfada göreceğiniz şekilde, toplamı herhangi bir T sayısı olan bir sihirli kareyi 1 ile 12 arasındaki sayıları ve $T - 18$, $T - 19$, $T - 20$, $T - 21$, sayılarını kullanarak inşa edebilirsiniz.

Aşağıda sihirli toplamı 55 olan bir örnek göreceksiniz. Önceki örnekte toplamı 34 eden her dörtlünün toplamı, bu dört sayılık grup sadece bir tane (iki veya sıfır değil!) T değişkenini kullanan kare içeriyorsa 55 edecek. Mesela sağ üst kareler doğru toplamı veriyor ($35 + 1 + 7 + 12 = 55$) fakat orta sol kare vermiyor ($34 + 2 + 3 + 37 \neq 55$).

8	11	T - 20	1
T - 21	2	7	12
3	T - 18	9	6
10	5	4	T - 19

T toplamlı hızlı bir sihirli kare

8	11	35	1
34	2	7	12
3	37	9	6
10	5	4	36

Toplamı 55 olan bir sihirli kare

Herkesin en sevdiği iki basamaklı bir sayı olmasa bile herkesin bir doğum tarihi vardır ve bence herkes doğum tarihi kullanılarak yapılan kişisel sihirli kareleri beğenir. İşte "çift doğum tarihi" içeren sihirli kareler, yani doğum tarihinin iki defa belirdiği kareler yaratmayı sağlayan bir yöntem: En üst satırda ve dört köşede. Diyelim ki doğum tarihi *A, B, C* ve *D* sayılarından oluşsun. O zaman şu şekilde bir sihirli kare yaratabiliriz. Her satır, sütun, çaprazın ve hemen her simetrik olarak seçilmiş dörtlü grubun toplamı $A + B + C + D$ edecek.

A	B	C	D
C - 1	D + 1	A - 1	B + 1
D + 1	C + 1	B - 1	A -1
B	A - 2	D + 2	C

Çift doğum tarihli bir sihirli kare. *A*/*B*/*C*/*D* tarihi en üst satır ve dört köşede beliriyor.

Annemin doğum günü Kasım 18, 1936. Sihirli karesi

11	18	3	6
2	7	10	19
7	4	17	10
18	9	8	3

Annemin doğum tarihini içeren doğum tarihli sihirli kare: 11/18/36. Sihirli toplam 38.

Şimdi kendi doğum tarihiniz ile bir sihirli kare yaratın. Yukarıdaki yöntemi kullanırsanız doğum tarihinizdeki sayıların toplamı 3 düzineden fazla defa belirecektir. Bakalım kaç tanesini bulabileceksiniz.

4x4'lük pek çok kombinasyonu barındırmasına rağmen daha büyük kareler yaratmanın da teknikleri vardır. Mesela, aşağıda 10 x 10'luk 1 ve 100 arasındaki bütün sayıları kullanan bir sihirli kare

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
79	6	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
4	81	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

10x10'luk 1 ve 100 arasında sayılarla yapılmış bir sihirli kare.

Her satır, sütun, ve çaprazın toplamını hiç toplama yapmadan bulabilir miyiz? Elbette! Daha önce gösterdiğimiz üzere 1'den 100'e kadar sayıların toplamı 5050 eder. Her satır bu sayının 10'da birine eşit olmalı. Yani sihirli toplam 5050/10 = 505. Bu kitap 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamı ile başlamıştı aynı yerde bitmesi uygundur. Bu kitabı okuduğunuz için tebrikler (ve teşekkürler). Pek çok matematiksel konu, fikir ve problem çözme stratejileri gördük. Bu kitabı geriye dönüp tekrar okuduğunuzda ve başka matematiksel kitaplar okuduğunuzda umarım buradaki fikirleri yararlı, ilginç ve sihirli bulursunuz.

MATAH BÖLÜM

Umarım bu kitap okuduğunuz son matematik kitabı olmaz, zira öyle çok şey var ki bunların ötesinde. Gerçeği söylemek gerekirse, bu kitapta bahsedilen birçok şey de dâhil olmak üzere, matematiğe dair ilginç şeylerin pek çoğunu okul dışında öğrendim.

Bu kitap, yapımcılığı The Great Courses tarafından üstlenilen *The Joy of Mathematics* adlı video derslerimin bir meyvesidir. Bahsi geçen videolar, tarafımdan verilen yirmi dört tane 30'ar dakikalık dersten oluşmaktadır ve bu kitapta bahsedilen konuların yanı sıra Olasılık Eğlencesi, Matematiksel Oyunlar ve Sihir konularını da kapsamaktadır. (Bu derslerdeki birçok fikri bu kitapta kullanmam konusunda gösterdikleri anlayıştan dolayı kendilerine müteşekkirim.) The Great Courses'ta cebir, geometri, kalkülüs ve matematik tarihi konularında bütünlüklü derslere ayrılmış üç düzineden daha fazla matematik kursu var (ses, video ve indirilebilir formatları mevcut). Bu dersleri anlatmaları için buldukları profesörler ülkenin en iyilerinden, müthiş bir iş çıkarmışlar. Bu projede yer alıp dört ders hazırlamak onur verici olduğu kadar aynı zamanda bir ayrıcalıktır benim için. Tarafımdan verilen diğer üç ders ise *Ayrık Matematik*, *Mental Matematiğin Sırları* ile *Oyunların ve Bulmacaların Matematiği* adlı derslerdir.

Kafadan matematiksel işlemlerin nasıl yapılabileceği hakkında yazılı bir materyal olarak Michael Shermer ile beraber yazdığımız Random House tarafından basılan *Mental Matematiğin Sırları* isimli kitabı okuyabilirsiniz. İrili ufaklı her çeşit probleme nasıl hızlı ve net yanıt verilebileceği ile ilgili çok ince detaylara iniliyor. Eğer 10'lara kadar olan çarpım tablosunu biliyorsanız bu kitaptaki bütün teknikleri anlayabilirsiniz. Daha basit bir yaklaşım olarak, Natalya St. Clair ile (kitabın ortak yazarı ve güzelim görsellerin yaratıcısı) ilköğretim çağındaki öğrencilere kafadan toplama ve çıkarma öğretmek için *Mental Hesaplama Sanatı* adlı bir çalışma kitabını hazırladık. Bu kitabı Amazon.com veya createspace.com'da bulabilirsiniz.

Bunların dışında ileri düzey okuyucular için üç tane daha kitap yazdım. İlk ikisi The Mathematical Association of America (MAA) tarafından basılan Jennifer J. Quinn ile beraber yazdığımz *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof* ve editörü Ezra Brown olan *Biscuits of Number Theory* kitaplarıdır. En yenisi ise Gary Chartrand ve Ping Zhang ile beraber yazdığımız *The Fascinating World of Graph Theory* adlı, Princeton University Press tarafından basılan kitabımızdır.

Büyük çoğunluğu eğlendirici matematik konuları üzerine olan iki yüzden fazla kitabın yazarı, tüm zamanların en büyük matematik sihirbazı, Martin Gardner'e edebi bir borcum var. Kitapları (ve *Scientific American*'daki "Matematiksel Oyunlar" köşesi) bir sürü matematikçi kuşağına ve tutkununa ilham vermiştir. Gardner'in yolundan giden, Alex Bellos, Ivars Peterson ve Ian Stewart'ın yazdığı bütün kitapları tavsiye ederim. Bu tarzdaki yeni kitapların en iyilerinden birisi, Steven Strogatz'ın yazdığı *The Joy of X: A Guided Tour of Math, from One to Infinity* adlı kitaptır.

Matematik kabiliyeti spektrumunun en tepesini hedefleyen matematik kitapları açısından, Richard Rusczyk'ın *The Art of Problem Solving* adlı kitap serisinin büyük bir hayranıyım. Bu seri cebir, geometri, kalkülüs, problem çözümleri ve daha fazlası üzerine iddialı-zorlayıcı ama temiz yazılmış kitapları içermektedir. İnternet sayfaları da (ArtOfProblemSolving.com) matematiği seven ve matematik yarışmalarına katılmaktan hoşlanan öğrenciler için açık kurslar sunuyor.

Bunlardan başka da eğlenceli internet kaynakları var. Meslektaşım Francis Su, Math Fun Facts adlı sayfasında (www.math.hmc.edu/funfacts) yüzlerce hayranlık uyandıracak matematiksel örnek sunuyor. Bunlar esasında, derslerinin ilk beş dakikasında hızlı ve çarpıcı örnekler vermek isteyen öğretmenler için oluşturulmuşlardır. Alex Bogomolny, Cut the Knot (Cut-The-Knot.org) adlı internet sitesinde interaktif biçimde, düzinelerce matematik derlemeleri ve bulmacaları yaratıyor, bunlarla uzunca bir süre hoşça vakit geçireceğinize kuşkum yok. Mesela bu sayfadaki başlıklardan birisinde Pisagor Teoreminin yüzlerce kanıtını bulabilirsiniz. Matematiği olabilecek en eğlenceli biçimde sunan, ücretsiz bir video kaynağı olarak Numberphile (Numberphile.com) sayfasına uğramalısınız.

Başka ekleyecek (ya da çarpacak) bir şeyim yok, çok keyifli okumalar!

TEŞEKKÜR

Beni bıkıp usanmadan yüreklendiren yayımcı temsilcim Karen Gantz Zahler ve coşkulu destekçim, Basic Books'tan sıra dışı editörüm TJ Kelleher olmadan bu kitap olmazdı.

Bu kitabı güzelleştiren, renk katan bir sürü şeklin, görselin ve matematiksel diyagramların yaratıcısı olan Natalya St. Clair'in paha biçilmez asistanlığı olmasaydı kitabın tamamlanabileceğini hayal bile edemezdim. Natalya'nın matematiğin sunuşunu güzelleştirmek gibi bir yeteneği var, O'nunla çalışmak büyük bir keyif.

Bu kitabın bütün bölümlerini dikkatle okuyan eski öğrencim Sam Gutekunst, tonlarca kıymetli geri bildirim yaptı. Sam kitabı birçok yönden iyileştirerek TJ'nin işini kayda değer biçimde kolaylaştırdı. Ayrıca keskin gözleriyle her bölümünü okuyup çokça öneride bulunan ve kitabın son haline gelmesine ciddi anlamda etki eden matematikçiler Amy Shell-Gellasch ve Vincent Matsko benim için büyük şanstı.

Harvey Mudd College'de bir sürü muhteşem öğrencim ve çalışma arkadaşım olduğu için çok şanslıyım. Özel olarak, değerli sohbetlerinden ve Math Fun Facts internet sayfasından dolayı Proesör Francis Su'ya, Smallwood ailesi bağışını matematiğe veren Scott ve Carol Ann Smallwood'a özel teşekkürlerimi sunarım. Değerli kritikleri ve fikirlerinden dolayı Christopher Brown, Gary Chartrand, Jay Cordes, John Fort, Ron Graham, Mohamed Omar, Jason Rosenhouse ve Natalya St. Clair'e minnettarlığımı dile getirmek isterim.

τ'yu akılda tutma yöntemini benimle paylaşan Ethan Brown'a, kelebek görselini kullanmama izin veren Doug Dunham'a, Sierpinski diagramının yaratıcısı Dale Gerdemann'a, "Bir kuzgunun yakınında (Near a Raven)" adlı muhteşem π övgüsü eserini kullanmama izin veren Mike Keith'e,

"Mathematical Pi" ve "Knowin' Induction," adlı şarkı sözlerini kullanmama müsaade eden matemüzisyenler Larry Lesser ve Dane Camp'a ve son olarak, "Golden Rose" adlı fotoğrafından dolayı Natalya St. Clair'e minnettarlığımı belirtmek isterim.

Perseus Books şirketinin çok profesyonel ekibine teşekkürler. Quynh Do, TJ Kelleher, Cassie Nelson, Melissa Veronesi, Sue Warga, ve Jeff Williams ile (ve sayamadığım arka planda çalışan diğer kişilerle) birlikte çalışmak bir zevkti.

The Great Courses'a kocaman bir teşekkür borçluyum, onların sayesinde matematiği hayal bile edemeyeceğim bir şekilde, geniş halk kitlelerine muhteşem DVD dersleri ile aktarabildim. Ayrıca bu kitabı hazırlama sürecinde *Joy of Mathematics* adlı dersimdeki malzemelereden epeyce bir kısmı almama müsaade ettiler. Tüm bu dersler boyunca Jay Tate vazgeçilmez bir kaynaktı.

Muhteşem ebeveynlerim Larry ve Lenore Benjamin'e ve beni bu günlere getiren öğretmenlerime teşekkür ederim. İlkokul öğretmenleri Betty Gold, Mary Ann Sparks, Jean Fisler'e, öğrencilere ve Mayfield High School, Carnegie Mellon University, Johns Hopkins University ve Harvey Mudd College'deki matematik ve uygulamalı matematik bölümlerine sonsuza kadar minnetkar kalacağım.

Ve en önemlisi, karım Deena ve kızlarım Laurel ve Ariel'e bu kitabın yazılması sürecinde gösterdikleri sevgi ve sabır için teşekkür ederim. Deena yazdığım her şeyi gözden geçirdi, O'na sonsuz sevgi ve şükran duyuyorum. Hayatıma kattığınız pekçok sihirden dolayı teşekkürler Deena, Laurel ve Ariel.

Arthur Benjamin
Claremont, California, 2015

DİZİN